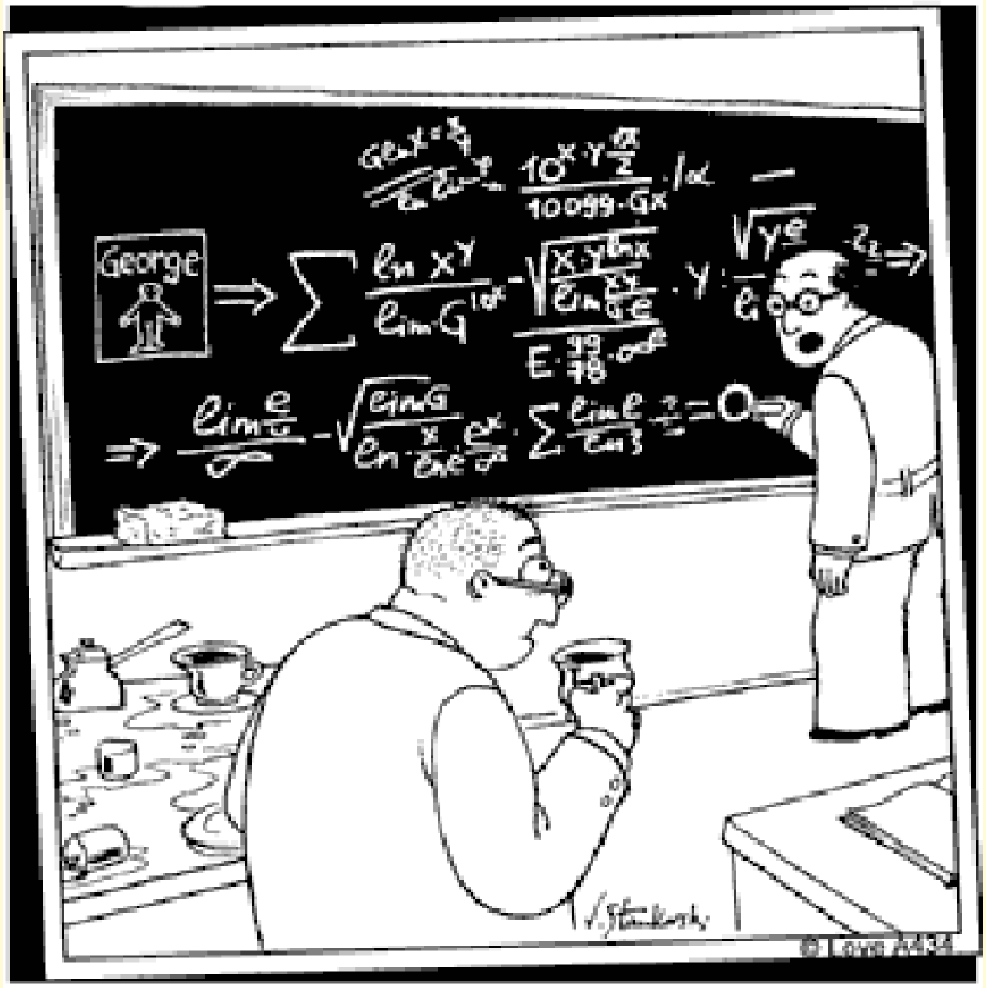
Section technicien supérieur
Cours de mathématiques

Chapitre 13
Matrices



"According to my calculations, George, you don't exist. *You ... don't ... exist*, George. I'm going to have to ask you to leave."

Aymar de Saint-Seine
Année scolaire 2011–2012

1. Généralités

1.1. Définition

Exemple : Voici des tarifs postaux, en euros, valable en 2009 :

Poids/Recommandé	Sans	R1	R2	R3
Jusqu'à 20g	0,56 €	3,36 €	3,96 €	4,86 €
Jusqu'à 50g	0,90 €	3,70 €	4,30 €	5,20 €
Jusqu'à 100g	1,35 €	4,15 €	4,75 €	5,65 €
Jusqu'à 250g	2,22 €	5,02 €	5,62 €	6,52 €
Jusqu'à 500g	3,02 €	5,82 €	6,42 €	7,52 €
Jusqu'à 1kg	3,92 €	6,72 €	7,32 €	8,22 €
Jusqu'à 2kg	5,16 €	7,96 €	8,56 €	9,46 €
Jusqu'à 3kg	6,04 €	8,84 €	9,33 €	10,23 €

Les informations peuvent être présentées de façon plus synthétique à l'aide du tableau suivant :

$$\begin{pmatrix} 0,56 & 3,36 & 3,96 & 4,86 \\ 0,90 & 3,70 & 4,30 & 5,20 \\ 1,35 & 4,15 & 4,75 & 5,65 \\ 2,22 & 5,02 & 5,62 & 6,52 \\ 3,02 & 5,82 & 6,42 & 7,52 \\ 3,92 & 6,72 & 7,32 & 8,22 \\ 5,16 & 7,96 & 8,56 & 9,46 \\ 6,04 & 8,84 & 9,33 & 10,23 \end{pmatrix}$$

C'est une matrice à 8 lignes et 4 colonnes.

Définition 1 : Matrice

*Une **matrice** est un tableau de nombres.*
*Les nombres sont appelés les **coefficients**, les **termes** ou les **éléments** de la matrice.*
*Si on a n lignes et p colonnes, on dit qu'on a une matrice de **dimension** $n\times\ p$.*
Si M est une matrice $n\times\ p$, le terme situé à la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne est noté $m_{i,j}$ (avec $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq p$).

Exemple : La matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ est de dimension 4×3.

Le terme a_{11} est 1, le terme a_{23} est 6, le terme a_{42} est 11.

1.2. Égalité de deux matrices

Théorème 1 : Égalité de deux matrices

Deux matrices M et M' sont égales si et seulement si elles sont de même dimension et que chaque élément de l'une est égal à l'élément correspondant de l'autre, c'est dire si, pour tout i et tout j, on a $M_{i,j}=M'_{i,j}$.

Exemple : On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & y & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B ne peuvent pas être égales puisqu'elles n'ont pas la même dimension.
Les matrices A et C seront égales si et seulement si $x = 1$ et $y = 8$.

2. Opérations sur les matrices

Exemple : Soit A la matrice donnant les tarifs postaux. Supposons que ces tarifs subissent une augmentation.
Soit B la matrice donnant les augmentations envisagés pour chacun des tarifs :

$$B = \begin{pmatrix} 0,02 & 0,04 & 0,09 & 0,18 \\ 0,03 & 0,05 & 0,10 & 0,20 \\ 0,05 & 0,15 & 0,75 & 0,65 \\ 0,22 & 0,02 & 0,62 & 0,52 \\ 0,32 & 0,82 & 0,42 & 0,52 \\ 0,42 & 0,72 & 0,32 & 0,22 \\ 0,50 & 0,96 & 0,56 & 0,46 \\ 0,50 & 0,84 & 0,33 & 0,23 \end{pmatrix}$$

soit C La matrice donnant les nouveaux tarifs. Comme le nouveau tarif est obtenu en faisant l'addtion de l'ancien tarif et de son augmentation, chaque coefficient de la matrice C est la somme du coefficient de la matrice A et du coefficient de la matrice B correspondant. On note $C = A + B$.

2.1. Addition

Définition 2 : Addition de matrices

Pour ***additionner*** *deux matrices de même dimension, il suffit d'ajouter chaque terme de la première matrice au terme situé à la même position sur la deuxième matrice.*

Autrement dit, la somme de la matrice $A = (a_{ij})$ (n lignes, p colonnes) et de la matrice $B = (b_{ij})$ (n lignes, p colonnes) est la matrice $C = A + B$ (n lignes, p colonnes) telle que pour tout $i \in [1, n]$, pour tout $j \in [1, q]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 4 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}$$

Remarque : On ne peut pas additionner des matrices qui n'ont pas les mêmes dimensions (c'est à dire des matrices telles que le nombre de ligne ou le nombre de colonne ne soit pas le même).

Théorème 2 (admis) :

A, B et C étant des matrices de mêmes dimensions, k et k' deux nombres. On démontre et nous admettrons que :
- $A + B = B + A$ *(commutativité) ;*
- $(A + B) + C = (A + B) + C$ *(associativité) ;*
- $A + 0 = A$ *(où 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls).*

2.2. Produit d'un nombre réel par une matrice

Exemple : Supposons, toujours dans le cas des tarifs postaux, que les tarifs soient augmentés uniformément de 10%. Chaque coefficient de la matrice A est donc multiplié par $1,1$. La matrice D des nouveaux tarifs est notée $D = 1,1A$.

Définition 3 : Multiplication d'un réel et d'une matrice

Si k est un nombre réel, et M une matrice, la matrice $k \times M$ est obtenue en multipliant chaque terme de M par k.

Exemple : $10 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \\ 70 & 80 & 90 \end{pmatrix}$

Théorème 3 :

A étant une matrice, k et k' étant des nombres, on a :
- $1A = A$ *;*
- $-A = (-1)A$ *;*
- $k(A + B) = kA + kB$ *(distributivité pour les matrices) ;*
- $(k + k')A = kA + k'A$ *(distributivité pour les réels) ;*
- $k(k'A) = (kk')A$ *(associativité).*

2.3. Produit de deux matrices

Exemple : Dans une entreprise de vente de pièces détachées, deux services parallèle s'occupent du courrier. Notons S_1 le service "traitement des commandes" et S_2 le service "échange-réclamation".
Pour une semaine donnée, le volume du courrier traité est donné par le tableau suivant :

Service/jusqu'à	20g	50g	100g	250g	500g	1kg	2kg	3 kg
S_1	50	35	15	10	0	0	0	0
S_2	7	3	4	10	0	0	0	1

On souhaite calculer le coût d'envoi par service et suivant le type d'affranchissement du courrier. On dispose les calculs de la façon suivante :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{sans} & \text{R1} & \text{R2} & \text{R3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,56 & 3,36 & 3,96 & 4,86 \\ 0,90 & 3,70 & 4,30 & 5,20 \\ 1,35 & 4,15 & 4,75 & 5,65 \\ 2,22 & 5,02 & 5,62 & 6,52 \\ 3,02 & 5,82 & 6,42 & 7,52 \\ 3,92 & 6,72 & 7,32 & 8,22 \\ 5,16 & 7,96 & 8,56 & 9,46 \\ 6,04 & 8,84 & 9,33 & 10,23 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} S1 \\ S2 \end{array} \begin{pmatrix} 50 & 35 & 15 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} . & . & a_{13} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Le nombre a_{13} représente de l'ensemble des colis affranchis au type $R2$ pour le service $S1$.

On obtient :

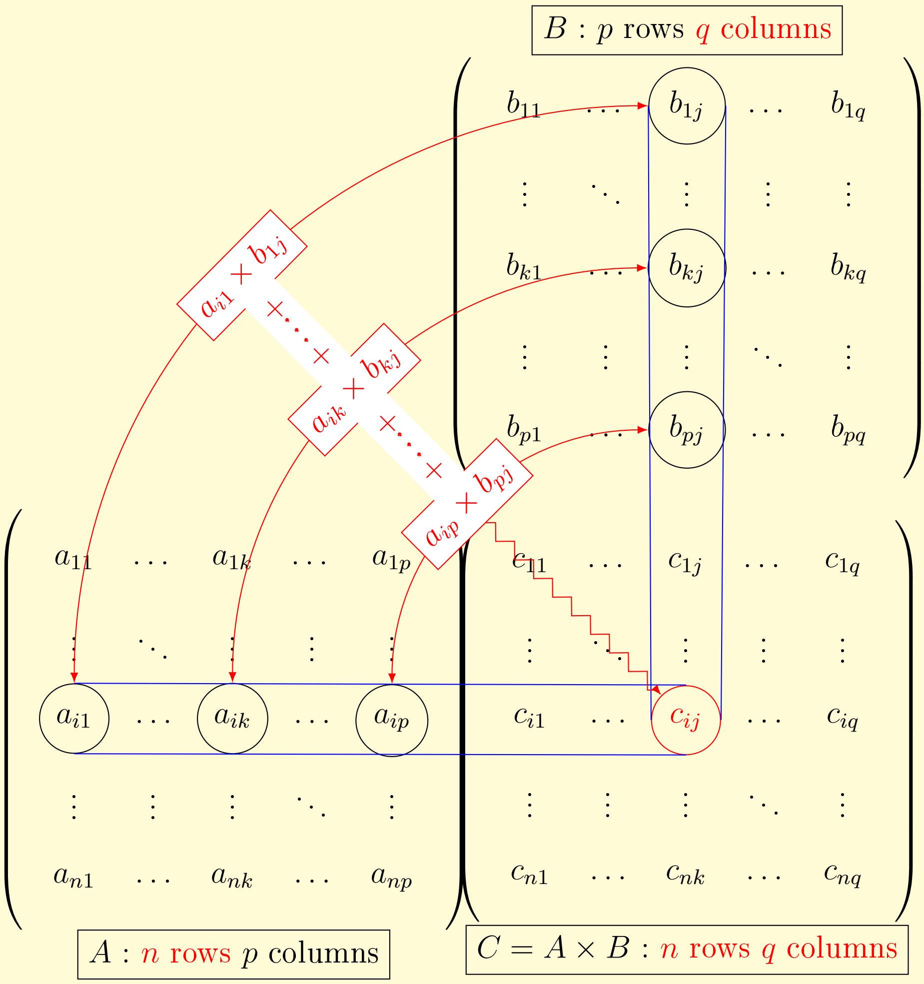
Services	sans	R1	R2	R3
S_1	101.95	.	.	.
S_2	.	.	.	.

Définition 4 : Multiplication de matrices

On ne peut multiplier deux matrices qui si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.
Pour avoir le terme situé à la ligne i et la colonne j, il faut multiplier chaque terme de la ligne i de la première matrice par ceux de la colonne j de la deuxième matrice et faire la somme de tous ces produits.
Autrement dit, le produit de A (n lignes, p colonnes) par B (p lignes, q colonnes) est la matrice $C = AB$ (n, lignes q colonnes) telle que $i \in [1, n]$, pour tout $j \in [1, q]$,
$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 & 5 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 26 & 29 \\ 35 & 62 & 68 \\ 50 & 98 & 107 \end{pmatrix}$.
c_{11} vient de $1 \times (-4) + 2 \times 3 + 3 \times 6$.
c_{32} vient de $7 \times 5 + 8 \times 0 + 8 \times 7$.

Remarque : Disposition des calculs : On multiplie les lignes de A par les colonnes de B suivant le schéma ci-dessous :



Théorème 4 :

A, B et C sont trois matrices telles que les opérations suivantes existent :
- *$A\times (B\times C)=(A\times B)\times C$ (associativité) ;*
- *$A\times (B+C)=A\times B+A\times C$ (distributivité à gauche) ;*
- *$(A+B)\times C=A\times C+B\times C$ (distributivité à droite) ;*

Attention ! en général $A\times B\neq B\times A$ (il n'a pas commutativité).

Définition 5 : Matrice inverse

*Soit M une matrice carrée de dimension $n\times n$. On appelle **matrice inverse** la matrice B telle que $A\times B=B\times A=I_n$ où I_n est la matrice identique de dimension $n\times n$.*
Cette matrice est notée A^{-1}.

Exemple : On considère $A=\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}$.
comme $\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 9 & 5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}5 & -1\\ -9 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, les deux matrices A et B sont donc inverses l'une de l'autre.

3. Applications

3.1. Gestion de données

3.2. Résolution d'un système

Un système linéaire de n équations à n inconnues est un système qui peut se mettre sous la forme $A \times X = B$, où A est une matrice $n \times n$, X est une matrice colonne $n \times 1$ contenant les inconnues et B est une matrice colonne $n \times 1$.

Exemple :

Le système $\begin{cases} 5x - y = 7 \\ -9x + 2y = 8 \end{cases}$ peut me mettre sous la forme : $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$

Pour résoudre le système $A \times X = B$, si A est inversible, on peut multiplier les deux membres à gauche par A^{-1} (attention au sens, la multiplication des matrices n'étant pas commutative).

$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$, et donc ($A^{-1} \times A$ tant la matrice identité), on a

$$X = A^{-1} \times B$$

Exemple : Dans l'exemple ci-dessus, on aurait

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 103 \end{pmatrix}$

4. Exercices

4.1. Écriture d'une matrice

13.1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$

1. Déterminer a_{12} ; a_{23} ; a_{32} ; a_{33}.
2. Déterminer i et j tels que $a_{ij} = 0$; $a_{ij} = 5$, $a_{ij} = -1$.

13.2 Écrire les matrices de dimensions 3×3 dans les cas suivants :

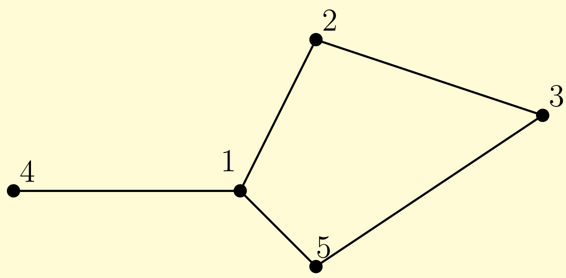
1. $\begin{cases} a_{ij} = i + j \text{ si } i \neq j; \\ a_{ij} = 0 \text{ si } i = j. \end{cases}$
2. $\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j; \\ a_{ij} = (-1)^{i+j} \text{ si } i = j. \end{cases}$
3. $\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i < j; \\ a_{ij} = i.j \text{ si } i \geqslant j. \end{cases}$
4. $\begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ si } i + j \text{ pair}; \\ a_{ij} = i^j \text{ sinon }. \end{cases}$

13.3 Il existe des matrices qui ont une forme particulière. On appelle :
- Matrice **ligne** : matrice qui n'a qu'une ligne.
- Matrice **colonne** : matrice qui n'a qu'une colonne.

- Matrice **carrée** : matrice qui a autant de lignes que de colonnes ($n \times\ n$).
- Matrice **diagonale** : matrice carrée telle que $M_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, c'est dire qui ne contient des termes non nuls que sur la diagonale qui va du coin haut et gauche au coin bas et droite. (Il peut y avoir des termes nuls sur cette diagonale).
- Matrice **unité** : matrice carrée telle que $M_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $M_{i,j} = 1$ si $i = j$.
- Matrice **nulle** : matrice dont tous les éléments sont nuls.

Donner un exemple de chacune des matrices particulières définies ci-dessus.

13.4 Le schéma ci-dessous représente les lignes de bus reliant directement les quartiers $1, 2, 3, 4$ et 5 d'une ville.



On schématise la situation par une matrice M définie de la façon suivante :
- $m_{ij} = 1$ s'il existe une ligne directe sans arrêt reliant i et j ;
- $m_{ij} = 0$ dans le cas contraire.

Écrire cette matrice.

4.2. Opérations sur les matrices

13.5 Soient les matrices A et B :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer $A + B$, $A - B$, $2A + 2B$, $3A - 2B$.

13.6 Soient les matrices A, B et C :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer AB, AC, $B + C$, $AB + AC$, $A(B + C)$. Que remarque-t-on ?

13.7 On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices AB et BA.
2. A-t-on $AB = BA$?

13.8 On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0,1 \\ 11 & -3 & -0,2 \\ -6 & 2 & 0,1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 40 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

Calculer les matrices AA' et $A'A$. Que remarque-t-on ?

13.9 On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer la matrices AB. Que remarque-t-on ?

13.10 A est une matrice à 5 lignes et 7 colonnes, B est une matrice à 7 lignes et 5 colonnes et C est une matrice carrée d'ordre 5.
Les calculs suivants sont-ils possibles ?

1. $3A - 2B$;
2. $A \times A$;
3. $B \times A$;
4. $A \times B$;
5. C^2 ;
6. $2A \times 3B - 3C$.

13.11 On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A \times B$, puis $(A \times B) \times C)$.
2. Cacluler $B \times C$ puis $A \times (B \times C)$.
3. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

13.12 Calculer le produit $M_1 \times M_2$ pour chacun des cas suivants :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & -7 \\ 2 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & -8 \\ -1 & 5 & -1 \\ -7 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad M_2 = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 1 & 8 & -6 \\ -10 & 0 & 10 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

4.3. Annales

13.13 *Polynésie 2006, Informatique de gestion.*
Une entreprise assure la production de deux types de calculatrices C_1 et C_2 en quantités (hebdomadaires) respectives x et y.

Le coût des éléments installés et le nombre d'heures de travail sont donnés pour chaque calculatrice dans le tableau suivant :

	C_1	C_2
Coût des éléments (en €)	6	8
Nombre d'heures de travail	1	1,5

Un programme de production hebdomadaire peut se représenter par la matrice $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
Cette production occasionne un coût c et un nombre t d'heures de travail. Ces deux éléments sont donnés dans la matrice $Y = \begin{pmatrix} c \\ t \end{pmatrix}$. Enfin on appelle A la matrice issue du tableau : $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Écrire une égalité matricielle reliant A, X et Y qui traduit la production de l'entreprise.
2. Durant une semaine, l'entreprise a produit 200 calculatrices C_1 et 800 calculatrices C_2. Par un calcul matriciel, déterminer le coût total et le nombre d'heures de travail pour la production de cette semaine.

Partie B
On note B la matrice : $B = \begin{pmatrix} 1,5 & -8 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

1. Effectuer le produit $B \times A$.
2. Montrer en transformant l'égalité $Y = A \times X$ que $B \times Y = X$.
3. Durant une autre semaine, l'entreprise fait face à un coût total de 8400 € et 1450 heures de travail.
   Déterminer par le calcul matriciel le nombre de calculatrices de chaque type fabriquées au cours de cette semaine.

13.14 *France 2002, Informatique de gestion.*
On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer la matrice $B = A - I$ puis calculer les matrices B^2 et B^3.
2. En déduire la matrice B^n pour tout entier n, $n \geqslant 3$.
3. La formule du binôme, appliquée au développement de $(B + I)^n$ permet d'écrire pour tout entier n, $n \geqslant 3$:

   $$A^n = (I + B)^n = I + C_n^1.B + C_n^2.B^2 + C_n^3.B^3 + ... + C_n^k.B^k + + ... + C_n^{n-1}.B_{n-1} + B^n$$

où :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

a. Vérifier que, pour $n \geqslant 3$: $A^n = I + C_n^1.B + C_n^2.B^2$

b. Montrer, à l'aide des résultats du 1) :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ n & 1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout entier } n, n \geqslant 3$$

13.15 *Nouvelle calédonie 2008, Informatique de gestion.*

On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3 ; en déduire pour tout entier $n > 3$, la valeur de A^n.
(On rappelle que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, $A^k = A^{k-1} \times A$).

2. À tout nombre réel x, on associe la matrice notée $M(x)$ où
$M(x) = I + xA + \dfrac{x^2}{2}A^2 \quad (R1)$.

a. Déterminer $M(0)$ et $B = M(4)$.

b. x et y étant deux nombres réels quelconques, calculer en utilisant la relation $(R1)$, le produit $M(x) \times M(y)$.

c. Montrer l'égalité : $M(x) \times M(y) = M(x+y)$. $\quad (R2)$.

3. Vérifier que $M(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. En utilisant les résultats de la question 2., déterminer le nombre réel x' tel que $M(x) \times M(x') = I$.
En déduire une matrice B' telle que $B \times B' = I$.

Table des matières