Chapitre VII
Sections planes de surfaces

7.1 Donner une équation de chacune des surfaces suivantes.

1. Le cylindre d'axe (Oz) et de rayon 2.
2. Le cylindre d'axe (Ox) et de rayon 1,5.
3. Le cylindre d'axe (Oy) et de rayon $\sqrt{3}$.
4. Le cône d'axe (Oz), de sommet O et d'angle au sommet $\frac{\pi}{3}$.
5. Le cône d'axe (Oz), de sommet O et d'angle au sommet $\frac{\pi}{4}$.
6. Le cône d'axe (Oz), de sommet O et d'angle au sommet $\frac{\pi}{6}$.

7.2 On considère le cylindre $\mathscr{C}$ d'axe (Oz) et d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

1. Caractériser l'intersection de $\mathscr{C}$ et du plan d'équation $z = -5$.
2. Caractériser l'intersection de $\mathscr{C}$ et du plan d'équation $y = 2$.

7.3 Soit $\mathscr{C}$ le cylindre d'axe (Oz) passant par le point $A(1, 2, 3)$.

1. Donner une équation cartésienne de $\mathscr{C}$.
2. On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $z = 3$. Indiquer la nature de l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$.
3. Donner une équation cartésienne de cette intersection dans un plan que l'on précisera.
4. On considère le plan $\mathscr{P}'$ d'équation $z = 2$. Indiquer la nature de l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}'$.
5. Donner une équation de cette intersection dans un plan que l'on précisera.

7.4 Soit $\mathscr{C}$ le cône d'axe (Oz) et de sommet O passant par le point $E(1, 2, 1)$.

1. Déterminer la valeur de $\tan\theta$, où θ est l'angle de la génératrice du cône $\mathscr{C}$, et en déduire l'équation de $\mathscr{C}$.
2. Soit $\mathscr{P}$ le plan parallèle au plan (xOy) passant par $F(1, 1, 2)$. Déterminer l'intersection de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{C}$.

7.5 On appelle $\mathscr{C}$ le cône d'axe (Oz) et de sommet O passant par le point P de coordonnées $(0, 1, 1)$. On appelle I_n l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le plan P_n d'équation $x = n$ où n est un entier naturel.

1. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer I_0 puis représenter I_0 dans un plan.
3. En effectuant deux études de fonctions, représenter I_1 dans le même plan que I_0.
4. Représenter I_2 et I_3 dans le même plan.

7.6 On appelle $\mathscr{C}$ le cône d'axe (Oz) passant par le point P de coordonnées $(0, 1, \sqrt{3})$. On appelle I_n l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le plan P_n d'équation $x = n$ où n est un entier naturel.

1. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
2. Déterminer I_0 puis représenter I_0 dans un plan.
3. En effectuant deux études de fonctions, représenter I_1 dans le même plan que I_0.
4. Représenter I_2 et I_3 dans le même plan.

7.7 Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z = x^2 + y^2$.

1. Prouver que $\mathscr{S}$ est située au-dessus du plan (xOy) et que O lui appartient.
2. Déterminer les intersections de la surface $\mathscr{S}$ avec les plans d'équations respectives $z = 2$, $z = 4$ et $z = k$ avec $k \in \mathbf{R}$. Ces sections sont appelées courbe de niveau 2, 4 et k de la surface $\mathscr{S}$.
3. Préciser les intersections de la surface $\mathscr{S}$ avec les plans d'équations respectives $x = 0$ et $y = 0$.
4. Déterminer les intersections de la surface $\mathscr{S}$ avec les plans d'équations respectives $x = 2$, $y = 2$ et $x = k$ avec $k \in \mathbf{R}$.
5. Soient A et B deux points de la surface $\mathscr{S}$. Prouver que le milieu de $[AB]$ n'appartient pas à $\mathscr{S}$. Cette surface contient-elle des segments de droites ?

7.8 Soit $\mathscr{S}$ la surface d'équation $z = xy$.

1. (a) Vérifier que O appartient à $\mathscr{S}$.
   (b) Soit $M(x, y, z)$ un point de la surface, prouver que $M'(-x, -y, z)$ lui appartient aussi. En déduire une propriété géométrique de la surface.
2. Quelle est la nature de l'intersection de $\mathscr{S}$ avec le plan (xOy) ?
3. (a) Trouver quatre points de $\mathscr{S}$ ayant une cote égale à -1.
   (b) Prouver que ces quatre points appartiennent à un même plan $\mathscr{P}$ dont on précisera une équation.
   (c) Quelle est l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan $\mathscr{P}$?
   (d) Plus généralement, quelle est l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $z = k$, avec $k \neq 0$?
4. (a) Prouver que l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $x = 0$ est une droite.
   (b) Quelle est l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ avec le plan d'équation $y = 0$?
   (c) Plus généralement, quelle est l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et des plans d'équations $x = k$ ou $y = k$, avec $k \neq 0$?
5. Prouver que l'intersection de la surface $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $x - y = 0$ est une parabole.

7.9 *Centres Étrangers, juin 2009*

1. On note (E) l'équation $3x + 2y = 29$ où x et y sont deux nombres entiers relatifs.
   (a) Déterminer un couple d'entiers solution de l'équation (E).
   (b) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).
   (c) Préciser les solutions de l'équation (E) pour lesquelles on a à la fois $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$;
2. Intersections d'un plan avec les plans de coordonnées.
   L'espace est muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y = 29$.
   (a) Démontrer que $\mathcal{P}$ est parallèle à l'axe (Oz) de vecteur directeur $\vec{k}$.
   (b) Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les axes (Ox) et (Oy) de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
   (c) Faire une figure et tracer les droites d'intersection du plan $\mathcal{P}$ avec les trois plans de coordonnées.
   (d) Sur la figure précédente, placer sur la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et (xOy), les points dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.
3. Étude d'une surface.
   $\mathcal{S}$ est la surface d'équation $4z = xy$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   Les figures suivantes représentent les intersections de $\mathcal{S}$ avec certains plans de l'espace.

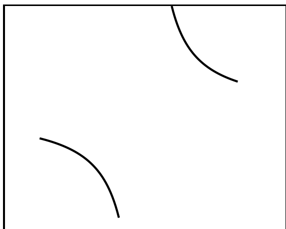
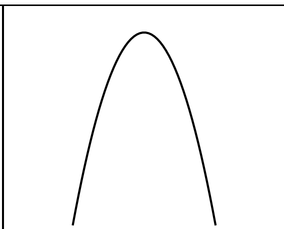
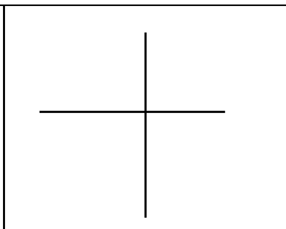
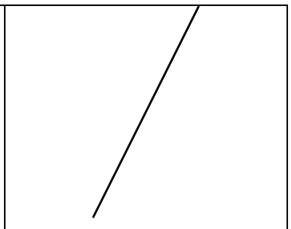
			

figure n° 1	figure n° 2	figure n° 3	figure n° 4

   (a) S_1 désigne la section de la surface $\mathcal{S}$ par le plan (xOy).
   Une des figures données représente S_1 laquelle ?
   (b) S_2 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{R}$ d'équation $z = 1$.
   Une des figures données représente S_2, laquelle ?
   (c) S_3 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $y = 8$.
   Une des figures données représente S_3, laquelle ?
   (d) S_4 désigne la section de $\mathcal{S}$ par le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x+2y = 29$ de la question 2.
   Déterminer les coordonnées des points communs à S_4 et $\mathcal{P}$ dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des entiers naturels vérifiant l'équation
   $3x + 2y = 29$.

7.10 *Amérique du Nord, mai 2008*

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan $(x\text{O}y)$.
2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3;1;-3)$ et $(-1;1;1)$.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B.
   (b) Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S).
3. Determiner la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy).
4. (a) On considère la courbe (C), intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.
   (b) M étant un point de (C), on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée. On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a;b) = 440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système
   $$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a;b) = 440 \end{cases}$$
   Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a;b)$ est égal à 1 ou 5.
   Conclure.
   Dans cette question toute trace de recherche même incomplete ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

7.11 *Réunion, juin 2009*

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soient F le point de coordonnées $\left(0\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{1}{4}\right)$ et P le plan d'équation $z = -\dfrac{1}{4}$.
   On note $d(M,\ P)$ la distance d'un point M au plan P.
   Montrer que l'ensemble (S) des points M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ qui vérifient $d(M,\ P) = MF$ a pour équation $x^2 + y^2 = z$.
2. (a) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $z = 2$?
   (b) Quelle est la nature de l'intersection de l'ensemble (S) avec le plan d'équation $x = 0$?
   Représenter cette intersection dans le repère $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
3. Dans cette question, x et y désignent des nombres entiers naturels.
   (a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x^2 par 7 ?
   (b) Démontrer que 7 divise $x^2 + y^2$ si et seulement si 7 divise x et 7 divise y.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Existe-t-il des points qui appartiennent à l'intersection de l'ensemble (S) et du plan d'équation $z = 98$ et dont toutes les coordonnées sont des entiers naturels ? Si oui les déterminer.

7.12 *Amérique du sud, novembre 2008*

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées (0ă ; 0ă ; 2) et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées (1 ; 1 ; 0) et soit D' la droite dont une représentation paramétrique estă :

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -t' \quad (t' \in \mathbf{R}) \\ z = -2 \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D'.

1. **Une équation de S**
   (a) Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.
   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite D.
   Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D. Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{-x+y}{2}\ ;\ \frac{x-y}{2}\ ;\ 2-z\right)$.
   En déduire MH^2 en fonction de x, y et z.
   Soit K le projeté orthogonal de M sur D'. Un calcul analogue au précédent permet d'établir queă : $MK^2 = \frac{(x+y)^2}{2}+(2+z)^2$, relation que l'on ne demande pas de vérifier.
   (c) Montrer qu'un point M de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\frac{1}{4}xy$.
2. **Étude de la surface S d'équation $z = -\frac{1}{4}xy$**
   (a) On coupe S par le plan $(x\text{O}y)$. Déterminer la section obtenue.
   (b) On coupe S par un plan P parallèle au plan $(x\text{O}y)$.
   Quelle est la nature de la section obtenue ?
   (c) *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.*
   On coupe S par le plan d'équation $x+y=0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

7.13 *Inde, avril 2004*
L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On considère les points $A(0; 5; 5)$ et $B(0; 0; 10)$.

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $(O; \vec{\jmath}, \vec{k})$.
   On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
   Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.
2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).
   (a) Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.
   (b) Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
   Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
   (c) Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
   Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
   Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.
4. Soit $M(x,\ y,\ z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

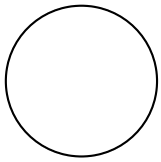


Figure 1

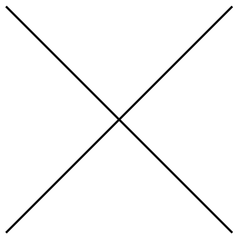


Figure 2

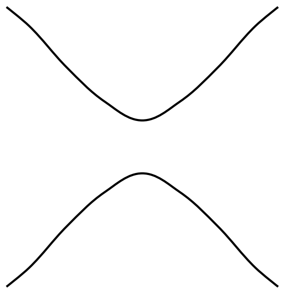


Figure 3

$\boxed{7.14}$ *France métropolitaine, juin 2003*

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* **1.** *et* **2.** *Seule l'équation de* Γ *donnée en* **1.c.** *intervient à la question* **4.**

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
   (a) Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.
   (b) Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.
   (c) On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice. Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.
2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de Γ avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
   Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

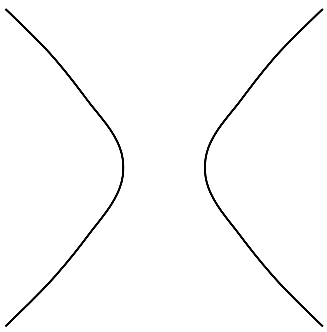


Figure 1

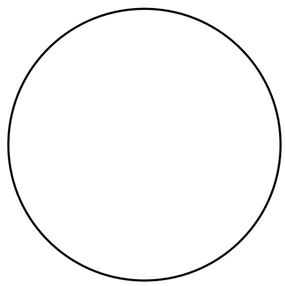


Figure 2

3. (a) Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3\ [7]$, dont l'inconnue x est un entier relatif, n'a pas de solution.
   (b) Montrer que pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.
4. (a) Soient $a,\ b$ et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :
   si le point A de coordonnées $(a,\ b,\ c)$ est un point du cône Γ alors $a,\ b$ et c sont divisibles par 7.

(b) En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

$\boxed{7.15}$ Devoir maison 7

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère la similitude directe f d'écriture complexe

$$z \mapsto \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

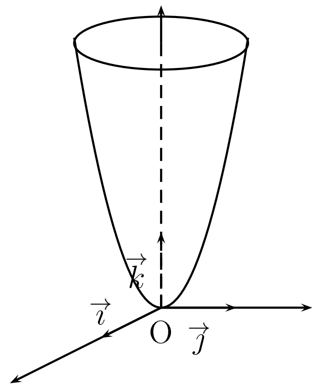
   Proposition 1 : $f = r \circ h$ où h est l'homothétie de rapport $3\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de centre le point Ω d'affixe $-2-2i$ et où r est la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

2. Pour tout entier naturel n non nul :
   Proposition 2 : $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 5.
   Proposition 3 : $5^{6n+1} + 2^{3n+1}$ est divisible par 7.

3. Dans le plan muni d'un repère, (D) est la droite d'équation $11x - 5y = 14$.
   Proposition 4 : les points de (D) à coordonnées entières sont les points de coordonnées $(5k + 14\ ;\ 11k + 28)$ où $k \in \mathbf{Z}$.

4. L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   La surface Σ ci-contre a pour équation $z = x^2 + y^2$.



   Proposition 5 : la section de la surface Σ et du plan d'équation $x = \lambda$, où λ est un réel, est une hyperbole.
   Proposition 6 : le plan d'équation $z = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ partage le solide délimité par Σ et le plan d'équation $z = 9$ en deux solides de même volume.

   Rappel : Soit V le volume du solide délimité par Σ et les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ où $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 9$.
   V est donné par la formule $V = \int_a^b S(k)\,\mathrm{dk}$ où $S(k)$ est l'aire de la section du solide par le plan d'équation $z = k$ où $k \in [a,\ b]$.