Chapitre VI
Similitudes directes

$\boxed{6.1}$ Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. On considère les points A d'affixe -4, B d'affixe $+4$, E d'affixe $4i$, C et D tels que les quadrilatères $AOEC$ et $BOED$ soient des carrés.

1. Placer les points précédents dans le repère $(O,\vec{u};\vec{v})$ et donner les affixes des points C et D.
2. Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + 4 + 4i$.
   - **a.** Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
   - **b.** Préciser les points $f(A)$ et $f(O)$. Déterminer l'image par f de la droite (CA), et celle de la médiatrice du segment $[AO]$.
   - **c.** Exprimer, pour tout point M d'affixe z, l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{MC}$ en fonction de z. En déduire que $MM' = MC$ et, pour M distinct de C, montrer qu'une mesure de l'angle des vecteurs $(\overrightarrow{MM'},\overrightarrow{MC})$ est $\frac{\pi}{2}$.
   - **d.** Soit J le milieu du segment $[EB]$ et I le milieu du segment $[AO]$. Déterminer l'image de J par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ (on justifiera la réponse).

$\boxed{6.2}$ Soit le repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe. Les points A, B, C sont définis par leurs affixes respectives : $z_A = 3 - i\sqrt{3}$; $z_B = 3 + i\sqrt{3}$; $z_C = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. On placera l'origine sur la gauche de la feuille.
2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_G de G.

   Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant le segment $[OA]$ en $[GC]$.
3. Soient a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.
   - **a.** Déterminer a et b pour que $R(O) = G$ et $R(A) = C$.
   - **b.** Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.
   - **c.** Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?
   - **d.** Construire, en justifiant, l'image du triangle OAB par R.
4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.
   - **a.** Déterminer a' et b' pour que $f(O) = G$ et $f(A) = C$.
   - **b.** Soit I le milieu du segment $[OG]$. Déterminer le point $f(I)$. La transformation f est-elle une réflexion ?
   - **c.** Construire en justifiant l'image du triangle OAB par f.

$\boxed{6.3}$ *Inde, avril 2009*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i}$.

1. Justifier qu'il existe une unique similitude directe S telle que : $S(\text{O}) = \text{A}$ et $S(\text{A}) = \text{B}$.

2. Montrer que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 - \text{i})z + \text{i}$.
Préciser les éléments caractéristiques de S (on notera Ω le centre de S).
On considère la suite de points (A_n) telle que :

- A_0 est l'origine du repère et,
- pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = S\left(A_n\right)$.

On note z_n, l'affixe de A_n. (On a donc $A_0 = \text{O}$, $A_1 = \text{A}$ et $A_2 = \text{B}$).

3. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = 1 - (1 - \text{i})^n$.

b. Déterminer, en fonction de n, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{\Omega A_n}$ et $\overrightarrow{A_n A_{n+1}}$.
Comparer les normes de ces vecteurs et calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A_n},\ \overrightarrow{A_n A_{n+1}}\right)$.

c. En déduire une construction du point A_{n+1} connaissant le point A_n.
Construire les points A_3 et A_4.

4. Quels sont les points de la suite (A_n) appartenant à la droite (ΩB) ?

$\boxed{6.4}$ *France métropolitaine, juin 2008*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 7 + \frac{7}{2}i$.

1. On considère la droite (d) d'équation $4x + 3y = 1$.
Démontrer que l'ensemble des points de (d) dont les coordonnées sont entières est l'ensemble des points $M_k(3k + 1, -4k - 1)$ lorsque k décrit l'ensemble des entiers relatifs.

2. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe de centre A qui transforme B en $M_{-1}(-2; 3)$.

3. Soit s la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{2}{3}iz + \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i.$$

Déterminer l'image de A par s, puis donner la nature et les éléments caractéristiques de s.

4. On note B_1 l'image de B par s et pour tout entier naturel n non nul, B_{n+1} l'image de B_n par s.

a. Déterminer la longueur AB_{n+1} en fonction de AB_n.

b. À partir de quel entier n le point B_n, appartient t-il au disque de centre A et de rayon 10^{-2} ?

c. Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels A, B_1 et B_n sont alignés.

$\boxed{6.5}$ *Inde, avril 2008*

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :
Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az+b$, où $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe. Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B', alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_A = -\sqrt{3} - i,\ z_B = 1 - i\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + i \text{ et } z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

1. **a.** Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D.
   b. Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
   c. Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.
2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} z + 2$.
   a. Déterminer les éléments caractéristiques de g.
   b. Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O.
   c. Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

$\boxed{6.6}$ *Amérique du Nord, mai 2007*
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).
On fera une figure que l'on complétera tout au long de cet exercice.
Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3 + 5i$, $b = -4 + 2i$ et $c = 1 + 4i$.
Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2 - 2i)z + 1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
2. **a.** Déterminer l'affixe du point B' image du point B par f.
   b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.
3. Soit M le point d'affixe $z = x + iy$, où on suppose que x et y sont des entiers relatifs.
   Soit M' l' image de M par f.
   Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y = 2$.
4. On considère l'équation (E) : $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Vérifier que le couple $(-4; 2)$ est une solution de (E).
   b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\ ;\ 5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux.
Placer ces points sur la figure.

$\boxed{6.7}$ *La Réunion, juin 2006*
$ABCD$ est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré $ABCD$. Soit J le milieu du segment $[CD]$. On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.
3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle-même).
   a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
   b. Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(A; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2 , $2+2i$ et $2i$.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$.
2. Calculer l'affixe du point Ω.
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E sur la figure.

$\boxed{6.8}$ *France, septembre 2008* Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. **a.** Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.
2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.
3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[O\ ;\ \vec{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

$\boxed{6.9}$ *Asie, juin 2005*

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_1$ donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_2$ donné.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = (O; \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{i}{2},\ 1-\frac{i}{2},\ 1+\frac{i}{2},\ \frac{i}{2},\ 1-i,\ 3-i,\ 3+i,\ 1+i.$$

$\mathscr{C}_1$ est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, $\mathscr{C}_2$ est le carré de sommet E, F G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ et S_2 l'ensemble $\{E, F, G, H\}$.

1. Placer tous les points dans le repère $\mathscr{R}$, construire les carrés $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.
3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.
   - **a.** Quel est le rapport de la similitude s ?
   - **b.** Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.
   - **c.** Démontrer que $g(O_1) = O_1$.
   - **d.** En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
   - **e.** En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.
4. Étude des centres de ces similitudes.
   - **a.** Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1$, $h \circ r_2$, $h \circ r_3$.

b. En déduire les centres Ω_1, Ω_2, Ω_3 de ces similitudes et les placer sur le dessin.

$\boxed{6.10}$ *Antilles-Guyane, juin 2004*

Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O. Soit P un point du segment $[BC]$ distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b. Déterminez les images de R et de P par r.

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS ?

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$. Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?

c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

$\boxed{6.11}$ *Amérique du Nord, juin 2003*

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4i$, $z_1 = -1-4i$, $z_2 = -4-i$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(\mathrm{A}_0) = \mathrm{A}_1$ et $S(\mathrm{A}_1) = \mathrm{A}_2$.

b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-i}{2}z + \dfrac{-3+i}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'. Vérifier la relation : $\omega - z' = i(z-z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $A_{n+1} = S(\mathrm{A}_n)$ et on pose $u_n = \mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. **a.** Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n : si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

$\boxed{6.12}$ *La Réunion, juin 2003*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1cm pour unité graphique.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3} + i\right) z - 1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$.
Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\widehat{\vec{u}\Omega M_0}$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n \geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n.

- **a.** Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
- **b.** Monter par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}} \left(z_0 - i\right).$$

- **c.** Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.

4.
- **a.** On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\ ;\ -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).
- **b.** Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que Im(z)=1 et Re(z)=0. Caractériser géométriquement Δ et le représenter.
  Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

$\boxed{6.13}$ **Devoir maison 6**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).

Soit Ω le point d'affixe 2. On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

- **a.** Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.
- **b.** Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+i}{2}z + 1 - i$.
- **c.** Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = i\left(2 - z'\right)$.

2.
- **a.** **Question de cours**
  Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.
  Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = i(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour tout point M distinct de Q.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2+i$.
On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon $0,01$.

$\boxed{6.14}$ **Devoir maison 6**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.
On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
On note $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n, $A_{n+1} = f\left(A_n\right)$.

1. **a.** Étant donné un point M d'affixe z, déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f.

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier n, l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n \mathrm{e}^{\frac{in\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $\left[\mathrm{O}\ ;\ \vec{u}\right)$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n.

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $\left[O\ ;\ \vec{u}\right)$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?