Thème 9
Intégration – Aspect géométrique

Vérification des acquis

- ☐ Savoir utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire.
- ☐ Savoir encadrer une intégrale.
- ☐ Pour une fonction monotone positive, savoir mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

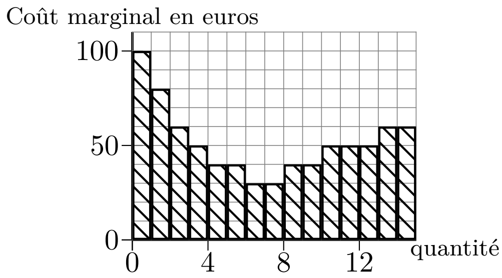
9.1 Activité 1 – Avec des rectangles

Partie A – Coût marginal, coût total

Dans un atelier, on fabrique des pièces de haute précision, 15 par jours au maximum. On donne ci-dessous, le coût marginal de chaque pièce fabriquée, c'est-à-dire le coût de fabrication de la $q^{\text{ième}}$ pièce quand on en a déjà fabriqué $q-1$.

1. Quel est le coût de fabrication :

- de la première pièce produite ?
- de la deuxième pièce produite ?
- de la dixième pièce produite ?
- des cinq premières pièces ?



2. On note $C_m(q)$ le coût marginal de la $q^{\text{ème}}$ pièce et $C_t(q)$ le coût de fabrication des q premières pièces.

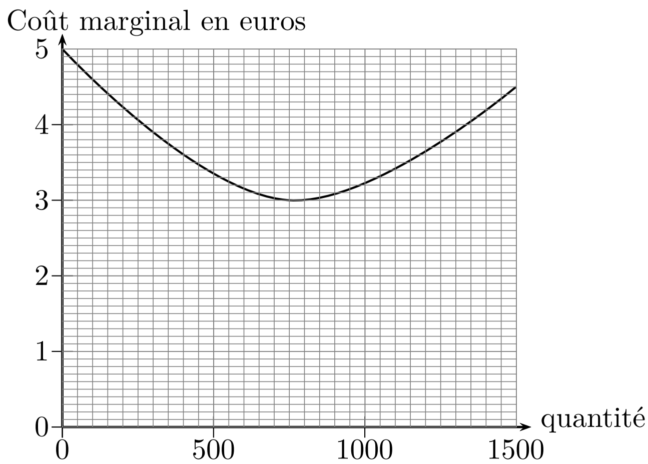
a. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$C_m(q)$										40					
$C_t(q)$					330										

b. Sur le graphique, que représente l'aire hachurée, somme des aires des rectangles ?

3. Quel est le coût total de fabrication des quinze premières pièces ?

4. L'entreprise fabrique un autre type de pièce en plus grand nombre. On obtient la courbe de coût marginal ci-contre, qui a une allure continue par rapport à la précédente :



a. Pour représenter le coût total de fabrication des 1500 pièces, quelle aire faudrait-il calculer ?

b. Hachurer cette aire sur la figure ci-contre.

c. En donner une estimation.

Partie B – Aire sous une courbe

On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par$f(x) = \dfrac{80}{x^2+16}$ et sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
On veut estimer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 5$.

1. Hachurer ce domaine sur la figure 1 ci-dessous.

2. On considère les rectangles R_i de largeur 1 et de hauteur $f(i)$, pour i variant de 1 à 5.

   a. Compléter la figure 2 ci-dessous.

   b. Hachurer les rectangles et expliquer pourquoi la somme de leurs aires est inférieure à l'aire hachurée sur la figure 1.

   c. Donner une valeur approchée par défaut de l'aire cherchée $\mathscr{A}$.

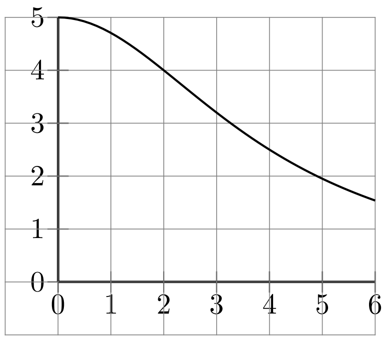


figure 1

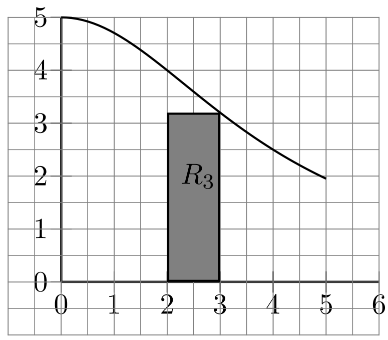


figure 2

3. Cette fois, on choisit des rectangles dont la largeur mesure 0,5.

   a. Faire apparaître sur la figure 2 pourquoi on obtient ainsi une meilleure approximation de l'aire cherchée.

   b. Que pourrait-on faire pour améliorer encore l'approximation ?

Bilan : Approximation de l'aire située sous une courbe

Pour obtenir une valeur approchée de l'aire comprise entre la courbe d'une fonction (positive), l'axe (Ox) et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = b$, on peut calculer la somme des aires des rectangles obtenus en partageant l'intervalle $[a;b]$ en n parties égales :

- la largeur de chaque rectangle est alors de $\dfrac{b-a}{n}$;
- la longueur de chaque rectangle est $f(x_i)$;
- la valeur approchée ainsi obtenue est : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\frac{(b-a)}{n}$.

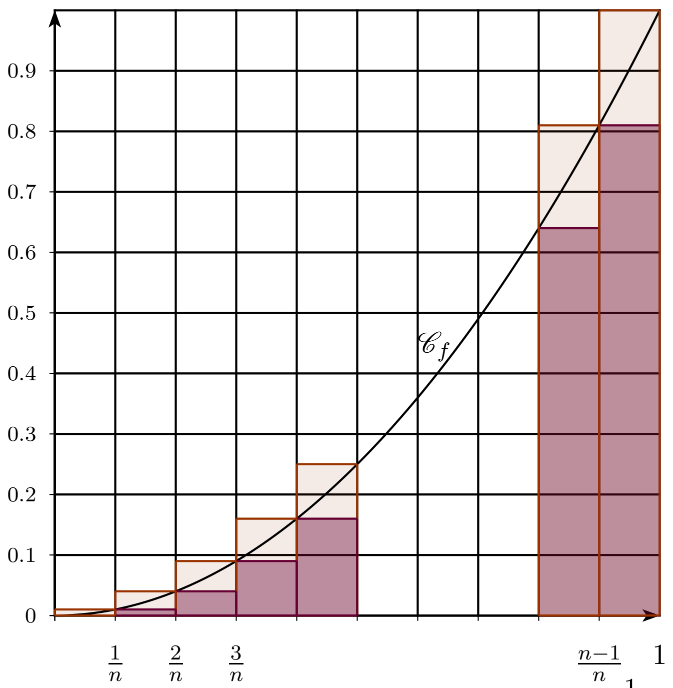
Pour améliorer cette approximation, on peut augmenter le nombre n de divisions.
Quand n tend vers l'infini, la largeur $\dfrac{b-a}{n}$ de chaque rectangle, que l'on peut noter dx, tend vers 0, et le nombre de rectangles tend vers l'infini. Si la somme des aires des rectangles tend vers une limite finie, cette limite est la valeur exacte de l'aire cherchée.
Cette aire est alors appelée **intégrale de a à b de f** et notée $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

9.2 Activité 2 – Encore des rectangles

Dans cette activité, on va chercher à encadrer $I = \int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ en utilisant deux méthodes : La première est géométrique et fait intervenir des suites, et la deuxième utilise un algorithme.

Partie A – Approximation de l'intégrale par deux suites

La courbe ci-dessous est la courbe représentative de la fonction carrée sur l'intervalle $[0; 1]$. Le but est d'encadrer I par deux suites qui convergent vers la même limite.



Pour cela, on partage l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$. On détermine alors n rectangles "intérieurs" et n rectangles "extérieurs" au domaine. On note u_n la somme des aires des rectangles "intérieurs" et v_n la somme des rectangles "extérieurs".

1. Justifier que pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_n = \frac{1}{n^3}(0^2 + 1^2 + \cdots + (n-1)^2) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

2. Expliquer l'encadrement $u_n \leqslant I \leqslant v_n$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$1^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n).

5. En déduire la valeur de I

Partie B – Algorithme associé

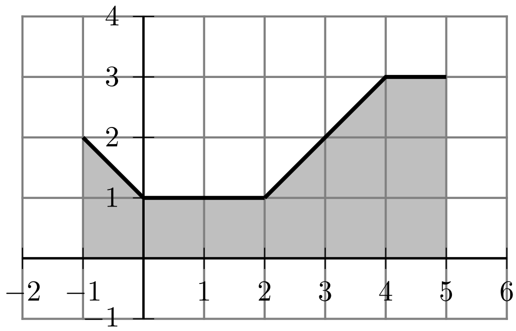
On considère l'algorithme ci-dessous :

Initialisation	n est un entier naturel
	k prend la valeur 0
	v prend la valeur 0
	V prend la valeur 0
Traitement	Demander la valeur de n
	Pour k allant de 1 à n
	$\quad$ v prend la valeur $v + \frac{1}{n}(\frac{k}{n})^2$
	$\quad$ V prend la valeur $V + \frac{1}{n}(\frac{k+1}{n})^2$
	Fin Pour
Sortie	Afficher v et V

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $n = 4$.

2. Soit f une fonction positive sur l'intervalle $[0; 1]$. Réécrire cet algorithme pour qu'il donne un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

9.3 Soit f la fonction affine par morceaux définie sur $[-1; 5]$ et représentée ci-contre.



Calculer les intégrales :

- $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$;
- $\displaystyle\int_4^5 f(x)\mathrm{d}x$.

En déduire $\displaystyle\int_{-1}^5 f(x)\mathrm{d}x$.

9.4 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

1. En utilisant la relation de Chasles, établir que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

9.5 Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I, soient a et b deux nombres tels que $a < b$. On considère M et m deux nombres tels que pour tout $x \in [a; b]$, $0 \leqslant m \leqslant f(x) \leqslant M$.
Démontrer l'inégalité de la moyenne :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

9.6 On considère les fonctions f et g définies sur $[0; 1]$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

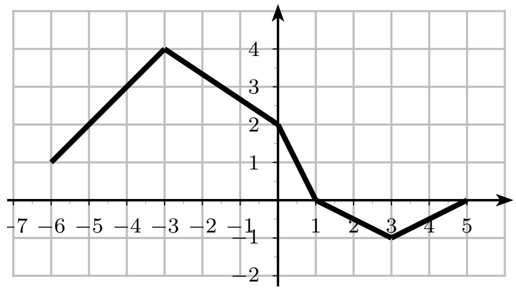
1. Justifier que pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leqslant g(x)$.

2. Comment écrire sous forme d'intégrale, l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$?

3. On pose, pour tout $x \in [0; 1]$, $h(x) = g(x) - f(x)$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$.

4. En déduire l'aire délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

9.7 On considère la fonction f affine par morceaux définie sur l'intervalle $[-6; 5]$ et représentée ci-contre.



1. Dresser le tableau de variations puis le tableau de signes de la fonction f sur $[-6; 5]$.
2. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-6}^{1} f(x)\mathrm{d}x$; **b.** $\displaystyle\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$; **c.** $\displaystyle\int_{-6}^{5} f(x)\mathrm{d}x$; **d.** $\displaystyle\int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

9.8 **Vrai ou Faux**

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0$ alors $f > 0$ sur $[a; b]$.
2. Soient f et g deux fonctions continues sur $[0; 1]$.
   Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$ alors $f = g$ sur $[0; 1]$.

9.9 Soit m un nombre réel positif. Une fonction f est définie sur l'intervalle $[-5; 5]$ par

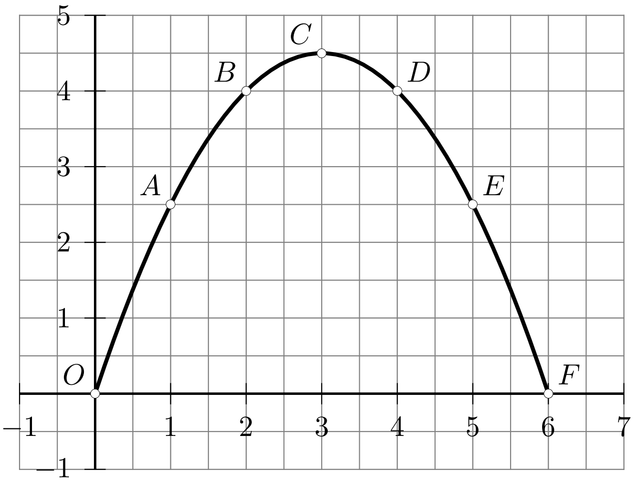
$$\begin{cases} f(x) = -\frac{2}{5}x + 1 & \text{si } x \in [-5; 0] \\ f(x) = mx + p & \text{si } x \in [0; 5] \end{cases}$$

1. L'image de 0 par la fonction f est définie par deux formules différentes, l'une dans l'intervalle $[-5; 0]$ et l'autre dans l'intervalle $[0; 5]$.
   Déterminer la valeur de p pour que ces deux définitions ne soient pas contradictoires.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-5}^{0} f(x)\mathrm{d}x$.
3. **a.** Exprimer, en fonction de m, l'image $f(5)$ de 5 par la fonction f.
   b. Justifier que f est positive sur l'intervalle $[0; 5]$.
   c. En déduire l'expression de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^5 f(x)\mathrm{d}x$ en fonction de m.
4. On sait d'autre part que $\displaystyle\int_{-5}^{5} f(x)\mathrm{d}x = 27,5$. En déduire, en exposant clairement le raisonnement, la valeur de l'intégrale J puis celle du nombre réel m.

9.10 Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x$.

1. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.
2. Calculer l'aire de la zone délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On donnera la réponse en unités d'aire, sous la forme d'une fraction $\frac{n}{2}$ où n est un entier.
3. Même question avec la droite d'équation $x = 2$ à la place de $x = 1$.
4. Même question avec la droite d'équation $x = 3$.
5. Plus généralement, soit t un nombre réel strictement positif. Trouver une formule donnant l'aire de la zone délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = t$.
6. Soit F la fonction définie par la formule trouvée à la question précédente. Calculer $F'(t)$. Que constate-t-on ?

9.11 Soit f la fonction définie sur $[0;6]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$. La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est tracée ci-dessous. Les points O, A, B, C, D, E et F appartiennent à cette courbe. Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la région délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 6$.



1. Tracer sur la figure précédente le polygone $OABCDEF$ et calculer son aire.
2. **a.** Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2$ admet pour dérivée la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.

   b. Calculer la différence $d = F(6) - F(0)$. Qu'observe-t-on par rapport à l'aire du polygone trouvée à la question précédente ?
3. La différence $d = F(6) - F(0)$ est en fait la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$. Calculer le pourcentage d'erreur correspondant à l'approximation obtenue avec le polygone $OABCDEF$.

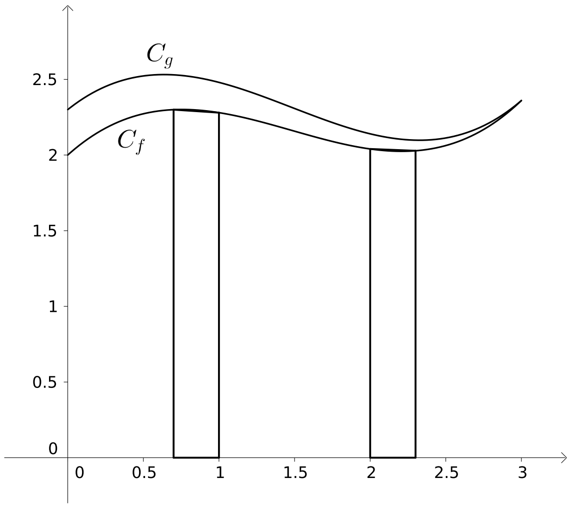
9.12 L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir un encadrement de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ où b est un réel supérieur à 0,5 saisi par l'utilisateur.

1. Appliquer cet algorithme avec l'entrée $b = 1$.
2. Utiliser GeoGebra, en particulier l'instruction `Integral[ <Function>, <Start x-Value>, <End x-Value> ]` pour calculer la valeur réelle de l'intégrale.
3. La valeur réelle de l'intégrale est-elle bien incluse dans l'encadrement obtenu à l'aide de l'algorithme.
4. Comment pourrait-on modifier l'algorithme pour obtenir un encadrement plus précis de cette intégrale ?
5. Implémenter l'algorithme modifié avec Algobox, puis l'utiliser pour obtenir un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-2} de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$. Utiliser GeoGebra pour vérifier la validité de cet encadrement.

Initialisation	b un réel supérieur à $0,5$
	x prend la valeur 0
	I prend la valeur 0
	J prend la valeur 0
Traitement	Tant que $x < b$
	y prend la valeur e^x
	I prend la valeur $I + 0,5 \times y$
	x prend la valeur $x + 0,5$
	y prend la valeur e^x
	J prend la valeur $J + 0,5 \times y$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher I et J

9.13

Pour un travail en art plastique, Manon réalise la lettre π sur un panneau en bois de 3m sur 2,5m donné ci-contre (les mesures sont donc en mètres).
Pour modéliser la "vague", elle choisit deux fonctions f et g définies sur $[0;3]$ par
$f(x) = 0,18x^3 - 0,8x^2 + 0,9x + 2$ et
$g(x) = 0,18x^3 - 0,8x^2 + 0,8x + 2,3$.
Les "pieds" sont représentés par deux trapèzes de largeurs 0,3m.
Habituellement, Manon peint 12m^2 avec un litre de peinture.
Quelle quantité de peinture est nécessaire pour peindre π ?



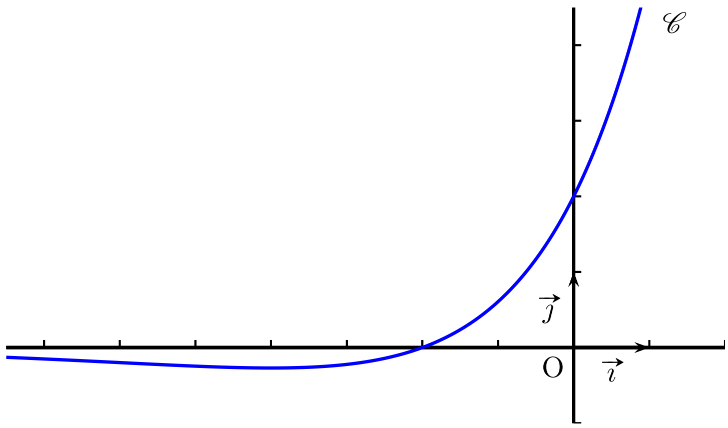
Sujets du baccalauréat

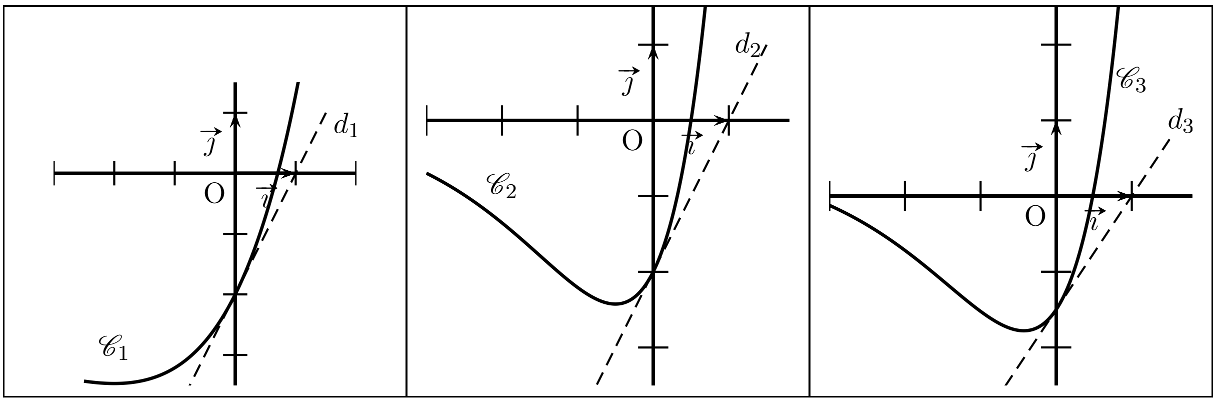
9.14 *Adapté de France métropolitaine, septembre 2013*

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}$ et trois autres courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout réel x.

a. À l'aide de la courbe $\mathscr{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la Partie A est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe $\mathscr{C}$ permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{2}(x+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.

b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Interpréter géométriquement le réel I.

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
Vérifier que $f = 2\left(u'v + uv'\right)$.

c. La valeur exacte de l'intégrale I vaut $I = 2\left(u(1)v(1) - u(0)v(0)\right)$. Calculer la valeur exacte de I.

3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à s la valeur 0.
Traitement :	Pour k allant de 0 à $n-1$ | Affecter à s la valeur $s + \dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$. Fin de boucle.
Sortie :	Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-contre où les trois rectangles ont la même largeur.

b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?