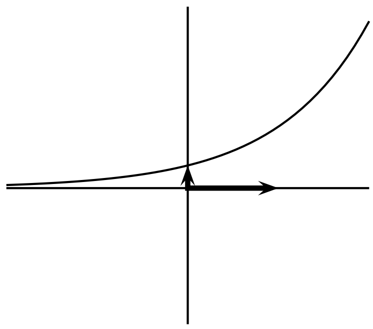
Thème 8
La fonction logarithme népérien

Vérification des acquis

- ☐ Connaître la définition, le sens de variation, la représentation graphique et le signe de la fonction logarithme népérien.
- ☐ Connaitre la dérivée de ln et plus généralement de $\ln(u)$.
- ☐ Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.
- ☐ Résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

8.1 Activité 1 – Fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle



Soit a un nombre réel. On souhaite résoudre graphiquement l'équation $e^x = a$. Pour cela, on a tracé la courbe représentative de la fonction exponentielle dans le repère ci-contre.

Discuter le nombre de solutions de cette équation en fonction des valeurs de a.

8.2 Activité 2 – Représentation graphique de la fonction ln

En utilisant le logiciel Geogebra :

1. Tracer la courbe de la fonction définie par $f(x) = \exp(x)$.
2. Créer un curseur a où le nombre a varie dans l'intervalle $[0,1\ ;\ 6]$.
3. Tracer la droite D d'équation $y = a$.
4. Soit A le point d'intersection de la courbe de f avec la droite D.
   Quelles sont les coordonnées du point A ?
5. Soit B le point de coordonnées $(y(A); x(A))$. Créer le point B, activer sa trace (menu contextuel) puis animer le curseur.
   Quel est l'ensemble décrit par le point B ?

Fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle

Exercice fil rouge 1 Équations/Inéquations

Résoudre dans $\mathbf{R}$ chacune des équations ou inéquations suivantes :

1. $e^x = 3$;
2. $e^{2x} = 2$;
3. $\ln x = -\frac{1}{4}$;
4. $e^{-x} = \frac{1}{2}$;
5. $e^{x^2} = 2$;
6. $\ln x = -3,7$.

8.3 Simplifier au maximum les expressions suivantes :

1. $\ln 2 + \ln 3 - \ln 6$;
2. $\ln e^{x^2+1} - e^{2\ln x} + \ln e$;
3. $\ln(2e^3) - \ln 2$;
4. $\ln\left(\frac{xe^x}{2}\right) - x$;
5. $e^{\ln 3} e^{\ln \frac{1}{3}}$;
6. $\ln(4x-6) + \ln\left(\frac{2}{2x-3}\right)$.

Exercice fil rouge 2

1. $\ln x = 3$;
2. $e^{x+1} = e$;
3. $\ln x = 1$;
4. $e^{3x+1} = \frac{5}{3}$.

8.4 Soit v la suite géométrique de premier terme $v_0 = \frac{5}{2}$ et de raison 3.

1. Indiquer le sens de variation de la suite v.
2. Calculer les 4 premiers termes de la suite v et conjecturer sa limite.
3. a. Exprimer v_n en fonction de n.
   b. En déduire, à l'aide de la fonction logarithme, le plus petit entier n tel que $v_n \geqslant 10^6$.
   c. Plus généralement, soit A un réel strictement positif. Déterminer, en fonction de A, le plus petit entier n tel que $v_n \geqslant A$.
   d. Que démontre la réponse à la question précédente ?
4. On considère maintenant la suite géométrique w de premier terme $w_0 = \dfrac{5}{2}$ et de raison $\frac{1}{3}$.
   a. Indiquer le sens de variation de la suite w.
   b. Calculer les 4 premiers termes de la suite w et conjecturer sa limite.
   c. Déterminer, à l'aide de la fonction logarithme, le plus petit entier n tel que $w_n \leqslant 10^{-6}$.
   d. Plus généralement, soit ε un réel strictement positif. Déterminer, en fonction de ε, le plus petit entier n tel que $w_n \leqslant \varepsilon$.
   e. Que démontre la réponse à la question précédente ?

Exercice fil rouge 3

1. $e^x \leqslant 5$;
2. $e^{x+1} \geqslant e$;
3. $e^{-3x+7} \geqslant e^2$;
4. $e^{x^2-2x} > e^{-3}$.

Étude de fonctions

8.5 Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \ln(3x-6) + \sqrt{x}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 9.

8.6 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x - 1}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.

1. Déterminer l'abscisse du point A, intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer une équation de la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice fil rouge 4

1. $e^{2x+1} \times e^{x+2} = -1$;
2. $e^{x^2} > \ln 5$;
3. $\ln\left((x+2)^{10}\right) = 10$;
4. $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) = 2$;
5. $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)} = 2$.

8.7 Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(4 - x^2)$ et $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal.

1. Expliquer pourquoi l'ensemble de définition de f est $]-2;2[$.
2. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.

8.8 Une société vend des objets. Le bénéfice (en centaines de milliers d'euros) pour la vente de x objets (en dizaines de milliers) est modélisé par la fonction B définie sur $]0;10[$ par $B(x) = 0,125x - \ln(\frac{1}{x^2} + x) + 0,6$.
On admet que la fonction B est croissante puis décroissante sur son intervalle de définition, c'est à dire qu'elle y admet un maximum unique.

L'algorithme ci-contre permet de trouver une valeur approchée de ce maximum.

1. Appliquer cet algorithme avec $a = 0,1$ et $p = 0,5$.
2. Expliquer les rôles des variables a, c et p.
3. Programmer l'algorithme sur une calculatrice ou avec un logiciel puis l'utiliser avec un pas de $0,1$ et avec un pas de $0,0001$. Noter dans chaque cas le résultat obtenu.

Traitement :
  Entrées : a et p deux réels positifs non nuls;
  v prend la valeur 0;
  tant que $v = 0$ *et* $a < 10$ **faire**
    d prend la valeur $B(a+p) - B(a)$;
    si $d < 0$ **alors**
      v prend la valeur 1;
      m prend la valeur $B(a + \frac{p}{2})$;
      Sorties : Afficher "Le bénéfice maximal est approximativement égal à " m.
    fin si
    a prend la valeur $a + p$;
  fin tq
fin

Exercice fil rouge 5 Dérivées

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions ci-dessous.

1. $f_1 : x \mapsto \ln x - x$;
2. $f_2 : x \mapsto e^x - 2\ln x$;
3. $f_3 : x \mapsto (\ln x)^2$;
4. $f_4 : x \mapsto x\ln x + x^2 \ln x$;

8.9 Soient f et g les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$ et $g(x)=x$. L'objectif de cet exercice est d'étudier les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de ces deux fonctions.

1. Expliquer pourquoi l'étude du signe de la fonction différence $d(x)=f(x)-g(x)$ permet de déterminer les positions relatives des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. Déterminer la fonction d', dérivée de d.
3. Étudier le signe de $d'(x)$ et en déduire les variations de d.
4. Justifier que la fonction d admet un maximum que l'on déterminera. En déduire le signe de $d(x)$ sur $]0;+\infty[$.
5. Déduire du résultat précédent les positions relatives des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

8.10 Dans cet exercice, on considère les fonctions f, g et h définies sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$, $g(x)=x^2$ et $h(x)=x^2-\frac{1}{2}$. On note $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ leurs courbes représentatives respectives.

1. Déterminer les variations de la fonction d définie sur $]0;+\infty[$ par $d(x)=f(x)-g(x)$.
2. Déduire de la question précédente le signe de la fonction d sur $]0;+\infty[$.
3. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
4. Déterminer de manière analogue les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_h$.

8.11 Dans tout cet exercice, on note $\mathscr{C}$ la courbe représentant la fonction ln dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, d'unité graphique 1 cm.

1. Vérifier que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e a pour équation $y=\frac{x}{e}$. En déduire les coordonnées d'un point particulier par lequel cette tangente passe.
2. La tangente à $\mathscr{C}$ en un point B passe par le point de coordonnées $(0;-1)$. Quel est ce point B ?

Soit A un point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $a>0$ et $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{C}$ en A.

3. Justifier que la droite $\mathscr{T}$ est la représentation graphique de la fonction affine f : $x\mapsto\frac{x-a}{a}+\ln a$.
4. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(x)-f(x)$.
   a. Expliciter $g'(x)$ et étudier son signe.
   b. En déduire les variations de g, puis son signe.
   c. Conclure sur la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{T}$.
5. a. Déduire du résultat de la question précédente que :
      i. pour tous réels strictement positifs x et a, $\ln(x)\leqslant\ln(a)+\frac{x-a}{a}$;
      ii. pour tout réel strictement positif a, $\ln(a+1)-\ln(a)\leqslant\frac{1}{a}$.
   b. La courbe $\mathscr{C}$ restreinte à l'intervalle $[10;11]$ est pratiquement un segment horizontal. Pourquoi ?

Exercice fil rouge 6

1. $f_5 : x\mapsto\dfrac{\ln x-x^2}{\ln x+x^2}$;
2. $f_6 : x\mapsto e^{\ln x+1}$;
3. $f_7 : x\mapsto\ln(x^2+1)$;
4. $f_8 : x\mapsto\dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.

8.12 En chimie, on utilise une fonction apparentée à la fonction ln, appelée logarithme en base 10 et notée log. Cette fonction, appliquée à un nombre réel strictement positif x, indique à quelle puissance il faut élever 10 pour obtenir ce nombre x. Par exemple :

- $\log(10) = 1$ car $10^1 = 10$
- $\log(100) = 2$ car $10^2 = 100$
- $\log(1000) = 3$ car $10^3 = 1000$

Plus généralement, $y = \log(x)$ équivaut à $x = 10^y$

1. En utilisant la calculatrice, compléter le tableau suivant, en prenant les valeurs approchées à 10^{-3} près.

x	1	2	3	4
$\ln(x)$				
$\log(x)$				

2. Qu'observe-t-on ?

3. Donner $\ln(10)$, et conjecturer une relation entre les fonctions log et ln.

4. Démontrer cette relation à partir de la définition de la fonction log.

5. En déduire une expression pour $\log(ab)$ en fonction de $\log(a)$ et $\log(b)$.

6. En chimie, le pH d'une solution est définie par

$$pH = -\log[H_3O^+].$$

Le pH neutre est de 7. C'est par exemple le pH de l'eau. On part d'une solution à pH 3 (acide).

a. Rappeler la signification de pH.

b. Quel pH obtient-on après une dilution de 10 fois de la solution ?

c. Quel pH obtient-on après une dilution de 15 fois de la solution ?

d. Quel pH obtient-on après une dilution de 100 fois de la solution ?

7. En homéopathie, le nombre de CH (Centésimale Hahnemannienne) indiqué sur les boites indique la dilution du principe actif présent dans la boite. Plus précisément, $0CH$ indique une solution de principe actif pur ; 1CH indique que le principe actif a été dilué 100 fois ; 2CH indique que le principe actif a été dilué 100^2 fois ; n CH indique que le principe actif a été dilué 100^n fois.

a. Traduire l'énoncé en termes mathématiques. Plus précisément, si C représente la concentration en principe actif dans la boite, que vaut le nombre de CH du produit ? On utilisera la fonction log.

b. Un des produits emblématiques de l'homéopathie, utile contre les états grippaux (Oscillococcinum) est dilué à 200CH. Qu'est ce que cela signifie ?

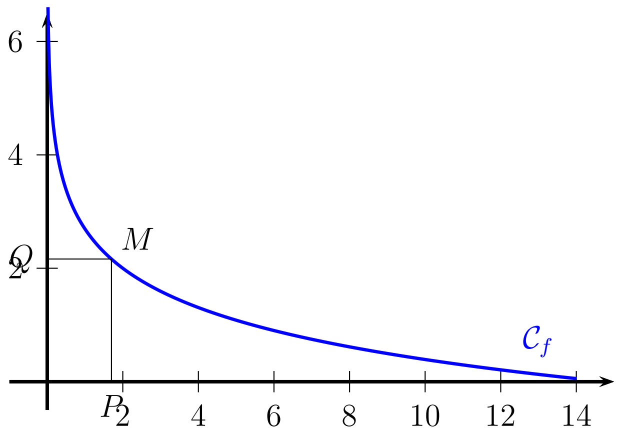
c. Sachant qu'il y a environ 10^{80} molécules dans notre univers, que penser de la dilution précédente ?

Sujet du baccalauréat

$\boxed{\textbf{8.13}}$ *Pondichery, mai 2016*
Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathcal{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

- L'aire du rectangle OPMQ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur $\mathcal{C}_f$?
- L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
  Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

$\boxed{\textbf{8.14}}$ *Nouvelle Calédonie, Novembre 2015*
Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^a.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.

2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

$\boxed{\textbf{8.15}}$ *Antille Guyane, Septembre 2014*
On considère l'équation (E_1) :

$$\mathrm{e}^x - x^n = 0$$

où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation (E_2) :

$$\ln(x) - \frac{x}{n} = 0.$$

2. Pour quelles valeurs de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

8.16 *La Réunion, juin 2007*
Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.
On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Donner l'équation réduite de la tangente (T) au point A à la courbe Γ.

   b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de (T) avec l'axe des ordonnées. Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de (T), puis tracer la courbe Γ et la tangente (T) dans un même repère.

2. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout couple $(x; y)$ de nombres réels strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$. En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\left(\sqrt{m}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(m)$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure (on laissera les traits de construction apparents).

8.17 *Inde, avril 2004*
Dans cet exercice, on utilisera la propriété suivante de la fonction logarithme népérien : pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$.

1. Soit u la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 0 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{1}{2-u_n} \quad \text{pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

   a. Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'une fraction irréductible.

   b. Comparer les quatre premiers termes de la suite u aux quatre premiers termes de la suite w définie sur $\mathbf{N}$ par $w_n = \frac{n}{n+1}$.

   c. Á l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = w_n$.

2. Soit v la suite de terme général v_n défini par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a. Montrer que $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4$.

   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par :

$$S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n.$$

   Exprimer $S_n$en fonction de n.
   Déterminer la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

8.18 *Antilles-Guyane, juin 2009*

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leqslant x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leqslant 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour $n \in \mathbf{N}^*$, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. En utilisant la calculatrice, conjecturer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Aucune justification n'est demandée.
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

8.19 *Polynésie, juin 2005*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \ln x$. On nomme Γ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.

1. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$. On note α_n cette solution. On a donc pour tout entier naturel n, $\alpha_n + \ln\alpha_n = n$.

a. Ci-dessous est donné la courbe Γ. Placer les nombres α_0, α_1, α_2, α_3, α_4 et α_5 sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

b. Préciser la valeur de α_1.

c. Démontrer que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. **a.** Calculer une équation de la tangente Δ à la courbe Γ au point A d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par $h(x) = \ln x - x + 1$. En déduire la position de la courbe Γ par rapport à Δ.

c. Tracer Δ sur le graphique ci-dessous. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $\frac{n+1}{2} \leqslant \alpha_n$.

4. Déterminer la limite de la suite (α_n).