Thème 7
Limites de suites

Vérification des acquis

- ☐ Savoir utiliser les théorèmes de comparaison pour déterminer la limite d'une suite.
- ☐ Savoir étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites.
- ☐ Savoir démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :
  - ◇ $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang ;
  - ◇ $u_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$;

  Alors $v_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$.
- ☐ Savoir déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique.
- ☐ Savoir démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$.

7.1 Activité 1 – Le globe-trotteur

Un globe-trotteur décide de parcourir 5000 km à pied. Il peut, le premier jour, parcourir 50 km à pied, mais la fatigue s'accumule et sa performance diminue de 1% chaque jour.

Partie A – À l'aide d'un tableur

1. À l'aide d'un tableur, calculer la distance parcourue par le globe-trotteur chaque jour.
2. Dans une autre colonne, calculer pour chaque jour la distance parcourue par le globe-trotteur depuis son départ.
3. Quelle semble être la distance maximale que le globe-trotteur peut parcourir dans ces conditions ? Peut-il atteindre son objectif ? Expliquer.

Partie B – Démonstration mathématique

On note d_n la distance parcourue par le globe-trotteur le $n^{\text{ième}}$ jour.

1. Calculer d_1, d_2 et d_3.
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Exprimer d_{n+1} en fonction de d_n. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la suite (d_n).
3. En déduire d_n en fonction de n.
4. On note t_n le nombre total de kilomètres parcourus au bout de n jours. Ainsi $t_n = d_1 + d_2 + ... + d_n$. Démontrer que $t_n = 5000\,(1 - 0,99^n)$.
5. Le globe-trotteur pourra-t-il atteindre son objectif initial ?

7.2 **Activité 2 – Une question de rentabilité**

Un éditeur envisage de faire paraître un nouveau magazine mensuel. Il considère que la parution d'un magazine reste rentable tant que le nombre d'abonnés annuels est supérieur à 3000.
Selon une étude de marché :

- le nombre d'abonnés serait de 8000 la première année ;
- le taux de réabonnement annuel serait de 80% ;
- chaque année, il y aurait 600 nouveaux abonnés.

Après avoir modélisé cette situation par une suite, dire, à l'aide de la calculatrice, s'il est intéressant de faire paraître ce magazine.

7.3 **Activité 3 – Escorté par deux gendarmes**

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$.

1. Vérifier à l'aide de la calculatrice que cette suite n'a pas un signe constant, n'est pas monotone et semble admettre une limite.
2. Déterminer deux entiers naturels non nuls consécutifs k et $k+1$ tels que $\sin(k) > 0$ et $\sin(k+1) < 0$. Quelle propriété de la question 1. a-t-on ainsi démontré ?
3. Déterminer trois entiers naturels consécutifs p, $p+1$ et $p+2$ tels que $u_{p+2} - u_{p+1} > 0$ et $u_{p+1} - u_p < 0$. Quelle propriété de la question 1. a-t-on ainsi démontré ?
4. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin(n)}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

   b. Lorsque n tend vers $+\infty$, quelles sont les limites des suites v et w définies par $v_n = \frac{1}{n}$ et $w_n = -\frac{1}{n}$?

   c. Que peut-on en déduire pour le comportement de la suite u à l'infini ?

Exercice fil rouge 1 Variations de suites

Déterminer le sens de variation de chacune des suites suivantes :
1. $u_n = 3 - 4n$; **2.** $v_n = \frac{n-1}{n}$; **3.** $w_n = n + \frac{1}{n}$.

Autour de la définition de la limite d'une suite

7.4 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = 5n + 3$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Déterminer, pour tout entier naturel n, la différence $u_{n+1} - u_n$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n).
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. **a.** Trouver un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant 500$.

   b. Prouver que, quel que soit le réel A, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $u_n \geqslant A$.

   c. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice fil rouge 2 Variations de suites

1. $u_n = 11n - 14$; **2.** $v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$; **3.** $w_n = n^2 - n$.

7.5 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel non nul par $v_n = \frac{1}{n^2}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

2. Préciser le signe de la suite (v_n).

3. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).

4. **a.** Trouver un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant 0,01$.

b. Prouver que, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier p tel que pour tout $n \geqslant p$, $v_n \leqslant \varepsilon$. Conclure quant à la limite de la suite (v_n).

Exercice fil rouge 3 Variations de suites

1. $u_n = 1 - \frac{4}{n}$; **2.** $v_n = e^{-n}$; **3.** $w_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$.

Comparaisons de suites et opérations sur les limites

7.6 Dans cet exercice, on s'intéresse aux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement, pour tout entier naturel n, par $u_n = n^2 + n$ et $v_n = n^2 - n$.

Partie A – Étude de la suite (u_n)

1. La suite (u_n) est-elle géométrique ? Est-elle arithmétique ?

2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

3. Prouver que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n^2$.

4. En déduire la limite de la suite (u_n).

5. On pouvait obtenir ce résultat d'une autre façon, laquelle ?

Partie B – Étude de la suite (v_n)

1. La suite (v_n) est-elle géométrique ? Est-elle arithmétique ?

2. Étudier le sens de variation de la suite (v_n).

3. Préciser les limites des suites de terme général n^2 et n. Peut-on en déduire la limite de la suite (v_n) ?

4. **a.** Justifier que, pour tout entier naturel non nul n, $v_n = n^2(1 - \frac{1}{n})$.

b. Donner la limite de la suite de terme général $1 - \frac{1}{n}$ et en déduire celle de la suite (v_n).

5. Il existe une relation simple, valable pour tout entier naturel n, entre u_n et v_{n+1}. Déterminer cette relation et retrouver ainsi le résultat précédent.

Exercice fil rouge 4 Limites de suites

Déterminer, en justifiant avec l'utilisation des limites usuelles, les limites des suites suivantes :

1. $u_n = n + 1$; **2.** $v_n = n^2$; **3.** $w_n = -3n + 1$.

7.7 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 2n - 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, calculer les 50 premiers termes de cette suite et conjecturer son sens de variation et sa limite.
2. En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = n^2(1 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2})$. En déduire, en détaillant précisément la méthode, la limite de la suite (u_n).

Exercice fil rouge 5 Variations de suites

1. $u_n = \frac{1-n^2}{2+n}$;	**2.** $v_n = -2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n$;	**3.** $w_n = 3 - \frac{n^2-1}{n^2}$.

7.8 Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par n par $u_n = n^3 + 8n^2$.
On considère l'algorithme ci-contre.

1. Faire fonctionner cet algorithme.
2. Que permet d'afficher l'algorithme ?
3. Conjecturer le sens de variation et la limite de la suite u.
4. Démontrer ces conjectures.
5. On souhaite désormais que l'algorithme affiche le rang du premier terme de la suite u qui dépasse A, A étant une valeur choisie par l'utilisateur. Modifier l'algorithme afin qu'il réponde à cette demande.

```
Traitement
N prend la valeur 0
U prend la valeur 0
Tant que U ⩽ 150 faire :
    N prend la valeur N + 1
    U prend la valeur N^3 + 8N^2
Fin Tant que
Sortie
Afficher N
```

Exercice fil rouge 6 Limites de suites

1. $u_n = \sqrt{n}$;	**2.** $v_n = \frac{1}{n}$;	**3.** $w_n = -\frac{1}{n^2}$.

7.9 On s'intéresse dans cet exercice aux suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^2}{n+1}$; $v_n = \dfrac{n}{n+1}$; $w_n = \dfrac{n}{n^2+1}$.

1. Préciser les limites des numérateurs et dénominateurs de ces trois suites.
   Peut-on en déduire les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?
2. Vérifier les égalités suivantes :
$$u_n = n \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \quad ; \quad v_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \quad ; \quad w_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}.$$
3. Préciser les limites des suites de terme général $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$.
4. En déduire les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Exercice fil rouge 7 Limites de suites

1. $u_n = 1 + \frac{1}{n^3}$;	**2.** $v_n = e^n$;	**3.** $w_n = -3 - e^{-n}$.

7.10 Un ingénieur crée l'algorithme ci-dessous afin de calculer et d'afficher les N premiers termes de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n$.

1. **a.** Appliquer cet algorithme avec l'entrée $N = 3$.
   b. L'algorithme accomplit-il précisément la tâche annoncée ? Si non, le modifier pour que cela soit le cas.
   c. Appliquer le nouvel algorithme avec l'entrée $N = 5$.
   d. La suite ainsi définie est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
   e. Quel semble être le sens de variation de la suite (u_n) ?

```
Initialisation
Saisir N, un entier
Traitement
u prend la valeur 0
i prend la valeur 1
Afficher u
Tant que i < N faire :
    u prend la valeur u + 2i
    i prend la valeur i + 1
    Afficher u
Fin Tant que
```

2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
4. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $u_n \geqslant 2n$.
5. Déduire de la question précédente la limite de la suite (u_n).

Exercice fil rouge 8 Limites de suites

1. $u_n = e^n + n^2$; **2.** $v_n = n^2 + 2n + \frac{1}{\sqrt{n}}$; **3.** $w_n = n^2 + 2n + 1$.

7.11 L'algorithme ci-dessous calcule et affiche les N premiers termes de la suite (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n}$.

1. **a.** Appliquer cet algorithme avec l'entrée $N = 5$. On pourra dresser un tableau pour répertorier les résultats trouvés en sortie.
   b. La suite ainsi définie est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?
   c. Quel semble être le sens de variation de la suite (v_n) ?
   d. Que peut-on conjecturer quant à la limite de cette suite ?

```
Initialisation
Saisir N, un entier
Traitement
v prend la valeur 0
i prend la valeur 0
Afficher v
Tant que i < N faire :
    u prend la valeur √(1 + v)
    i prend la valeur i + 1
    Afficher u
Fin Tant que
```

2. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant v_n \leqslant 2$.
3. Déterminer le sens de variation de la suite (v_n).
   On admettra pour l'instant que les résultats des questions 2 et 3 suffisent à prouver que la suite v possède une limite réelle.
4. Résoudre l'équation $\ell = \sqrt{1 + \ell}$.
5. Déduire de la question précédente la limite de la suite (v_n).

Exercice fil rouge 9 Limites de suites

1. $u_n = 3n^2 - 5n$; **2.** $v_n = e^{-n} + \frac{1}{n^2} + 2$; **3.** $w_n = \frac{n+1}{n+2}$.

7.12 On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$u_n = [(-1)^n - 1]n^2 \text{ et } v_n = \frac{(-1)^n - 1}{n+1}.$$

1. a. À l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, calculer les dix premiers termes de la suite (u_n). Cette suite semble-t-elle avoir une limite (finie ou infinie) ?
   b. Prouver que pour tout entier naturel n pair, c'est-à-dire de la forme $n = 2k$ avec $k \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$.
   c. Donner l'expression de u_n pour tout entier naturel n impair, c'est-à-dire de la forme $n = 2k + 1$.
   d. Que peut-on en déduire pour la limite éventuelle de la suite (u_n) ?
2. Répondre aux mêmes questions pour la suite (v_n).

Études de suites géométriques

Exercice fil rouge 10

Soit (v_n) une suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q. Préciser, dans chacun des cas ci-dessous, le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (v_n).

1. $v_0 = \sqrt{2}$ et $q = 5$. **2.** $v_0 = 3,5$ et $q = 0,01$. **3.** $v_0 = \frac{1}{3}$ et $q = -2.3$.

7.13 Écrire un algorithme donnant, en fonction de deux réels v_0 et q en entrée, la limite de la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison q.

Exercice fil rouge 11 Suites géométriques

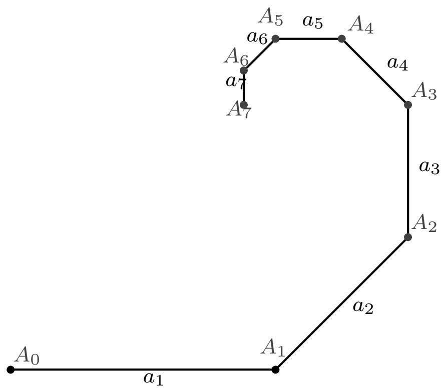
1. $v_0 = 0$ et $q = 1$. **2.** $v_0 = -1$ et $q = 42$. **3.** $v_0 = -\frac{15}{7}$ et $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.14 On considère la suite (u_n), définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 3$.

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les 30 premiers termes de la suite. Que peut-on conjecturer concernant ses variations et sa limite ?
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 12$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. On explicitera sa raison et son premier terme.
   b. En déduire une expression de v_n en fonction de n puis de u_n en fonction de n.
   c. En déduire les variations de (u_n) et la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$. Est-ce cohérent avec la question 1. ?

7.15 On considère la figure infinie, construite par itérations, dont l'étape $n = 7$ est représentée ci-dessous. Cette figure est définie selon les règles suivantes :

- Le segment initial $[A_0A_1]$ a pour longueur $a_1 = 1$.
- Pour tout entier naturel $n > 1$, on définit un point A_n et on note a_n la longueur du segment $[A_{n-1}A_n]$. Le point A_n est tel que
  - ◇ $a_n = \frac{\sqrt{2}}{2}a_{n-1}$;
  - ◇ $(\overrightarrow{A_{n-1}A_{n-2}}; \overrightarrow{A_{n-1}A_n}) = -\frac{3\pi}{4}$.



1. Calculer la longueur des quatre premiers segments constituant cette figure.
2. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la suite (a_n), puis donner l'expression de a_n en fonction de n
3. Déterminer la limite de la suite (a_n).
4. Déterminer à la calculatrice le plus petit entier n tel que $a_n \leqslant 10^{-10}$.
5. Calculer la longueur de la figure représentée ci-dessus, notée S_7.
6. On note S_n la longueur de la figure constituée, selon le processus détaillé précédemment, de n segments et $n + 1$ points.
   a. Exprimer S_n à l'aide de termes de la suite (a_n).
   b. Prouver que la limite de la suite (S_n) est égale à $2 + \sqrt{2}$. Interpréter ce résultat graphiquement.

Exercice fil rouge 12 Suites géométriques

1. $v_0 = -10$ et $q = -\frac{1}{4}$. **2.** $v_0 = q = -2$. **3.** $v_0 = -5$ et $q = 3$.

7.16 *Étude d'une suite non convergente.*
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 2n + 2,5$.

1. On suppose que (u_n) converge vers une limite réelle l.
   a. Rappeler la définition d'une suite convergente vers l.
   b. Justifier que la suite (u_{n+1}) converge aussi vers l et en déduire la limite de $(u_{n+1} - 0.5u_n)$.
   c. Montrer que cela est impossible et conclure.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $v_n = u_n - 4n + 3$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser ses éléments caractéristiques.
   b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 0$.
   c. Étudier la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

7.17 u est la suite définie par $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Déterminer la limite de la suite u.

Sujets du baccalauréat

7.18 *Antilles-Guyane, juin 2015*

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $0,5$ et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

$\boxed{\textbf{7.19}}$ *Nouvelle Calédonie, novembre 2015*
On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} & = & \frac{1}{2}d_n + \frac{1}{2}a_n + 70 \end{array}\right.$$

1. Calculer d_1 et a_1.

2. On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé :

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	    A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a. Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1.** ?

b. Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3. **a.** Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c. La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4. On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b. Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c. En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}$.

d. Étudier la convergence de la suite (a_n).

7.20 *Polynésie, Juin 2014*

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.

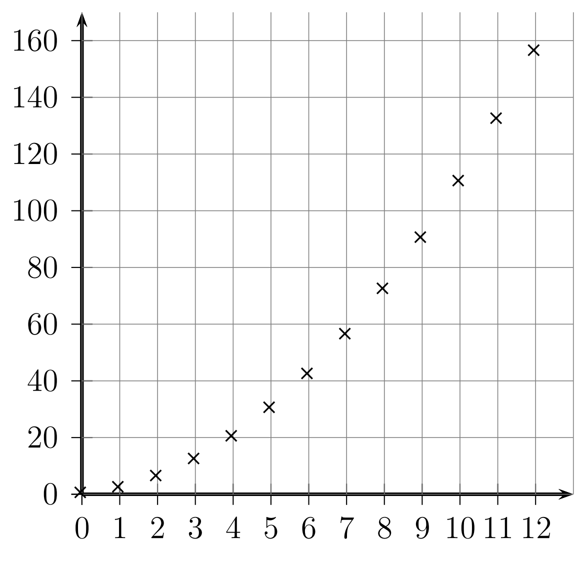
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel	**Variables :**	n est un entier naturel
	u est un réel		u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n
Traitement :	u prend la valeur 0	**Traitement :**	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :		Pour i allant de 0 à $n-1$:
	u prend la valeur $u+2i+2$		u prend la valeur $u+2i+2$
	Fin Pour		Fin Pour
Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$. Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

7.21 *Centres étrangers, juin 2013*

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A – Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-contre.
Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur 1,5

Traitement	Tant que $n < 9$
	    Affecter à u la valeur ...
	    Affecter à n la valeur ...
	Fin Tant que

Sortie	Afficher la variable u

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B – Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = \dfrac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C – Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

7.22 *France métropolitaine, juin 2013*

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_n \leqslant n + 3.$$

b. Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}\left(n + 3 - u_n\right).$$

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n,

$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).