Chapitre 6
Droites de l'espace

Vérification des acquis

- ☐ Étudier les positions relatives de droites de l'espace.
- ☐ Déterminer une représentation paramétrique de droite dans l'espace.
- ☐ Établir l'orthogonalité de deux droites de l'espace.

6.1 Activité 1 – Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées des 8 sommets du cube.
2. On considère l'ensemble des points de coordonnées

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-t \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } t \text{ est un réel quelconque.}$$

   a. Quel point obtient-on si $t = 0$? si $t = 1$?
   b. Placer le point obtenu pour $t = \frac{1}{2}$, puis pour $t = -1$.
   c. Quel semble être l'ensemble des points obtenus lorsque t parcourt $\mathbf{R}$?
3. Considérons maintenant un point quelconque M de la droite (AC).
   a. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AM}$.
   b. Justifier qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC}$.
   c. En déduire les expressions des coordonnées de M en fonction du nombre k.

6.2 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = -3+5t \\ y = -1+3t \\ z = 4-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R})$$

1. Déterminer les coordonnées du point obtenu pour $t = -1$, $t = 3$ puis $t = 0,5$.
2. Pour chacun des points suivants, dire s'il appartient à la droite $\mathscr{D}$. Si oui, indiquer la valeur du paramètre t correspondante.
   - $\mathrm{A}(-3; -1; 4)$
   - $\mathrm{B}(-1; 5; -1)$
   - $\mathrm{C}(2; 2; 1)$
3. Déterminer les coordonnées du point E d'abscisse 1 sur la droite $\mathscr{D}$.
4. Existe-t-il un point de $\mathscr{D}$ d'abscisse 7 et d'ordonnée 6 ? Si oui, donner ses coordonnées. Si non, expliquer pourquoi.
5. Existe-t-il un point de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est égale à l'ordonnée ? Si oui, donner ses coordonnées. Si non, expliquer pourquoi.
6. Justifier que, pour tout nombre réel a, il existe un point de la droite $\mathscr{D}$ d'abscisse a. Exprimer ses coordonnées en fonction de a.

6.3 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+4t \\ y & = & 3-2t \\ z & = & -2-4t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbf{R})$$

1. Parmi les vecteurs suivants, lesquels sont des vecteurs directeurs de la droite $\mathscr{D}$? Justifier précisément.

- $\vec{u_1}(-4;2;4)$
- $\vec{u_2}(1;3;-2)$
- $\vec{u_3}(2;-1;2)$
- $\vec{u_4}(0;0;0)$

2. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v_1}$ de $\mathscr{D}$ dont la norme est égale à 6.

3. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v_2}$ de $\mathscr{D}$ dont la norme est égale à 2. En déduire une nouvelle représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.

4. Déterminer un vecteur directeur $\vec{v_3}$ de $\mathscr{D}$ dont l'abscisse est égale à 3. En déduire une nouvelle représentation paramétrique de $\mathscr{D}$.

Exercice fil rouge 1 Représentations paramétriques de droites

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. $A(2;-3;5)$ et $\vec{u}(-4;2;7)$ **2.** $A(0;-2;1)$ et $\vec{u}(3;1;0)$

6.4 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(1;2;-3)$, $B(2;0;3)$, $C(-1;-2;1)$ et $D(7;2;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

3. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Sont-elles orthogonales ?

4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ parallèle à (AB) passant par C.

5. Préciser les positions relatives des droites Δ et (CD).

Exercice fil rouge 2 Représentations paramétriques de droites

1. $A(\frac{1}{2};0;\frac{1}{3})$ et $\vec{u}(1;-2;3)$ **2.** $A(1;-2;3)$ et $\vec{u}(\frac{1}{2};0;\frac{1}{3})$

6.5 On considère quatre droites de l'espace Δ, $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$ et $\mathscr{D}_3$ dont voici les représentations paramétriques :

$$\Delta\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+3t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 3-t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbf{R}) \qquad \mathscr{D}_1\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-2k \\ y & = & 4-3k \\ z & = & 1+2k \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{R})$$

$$\mathscr{D}_2\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -2u \\ y & = & 1-4u \\ z & = & 1-u \end{array}\right. \quad (u \in \mathbf{R}) \qquad \mathscr{D}_3\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5-6v \\ y & = & 3-2v \\ z & = & 1+2v \end{array}\right. \quad (v \in \mathbf{R})$$

1. Rappeler les différentes possibilités pour la nature de l'intersection de deux droites dans l'espace, et les positions relatives correspondantes.

2. En identifiant x, y et z, dans les représentations paramétriques de Δ et $\mathscr{D}_1$, on obtient un système de trois équations à deux inconnues.

a. Écrire ce système d'équations.

b. Résoudre le système : on doit trouver une valeur de t et une valeur de k qui vérifient les trois équations du système.

c. Dans les représentations paramétriques de Δ et $\mathscr{D}_1$, remplacer t et k par les valeurs trouvées.

d. Qu'a-t-on ainsi trouvé et démontré ?

e. Les droites Δ et $\mathscr{D}_1$ sont-elles coplanaires ?

3. **a.** Résoudre de même le système obtenu à partir des représentations paramétriques de Δ et $\mathscr{D}_2$? Que peut-on en déduire ?

b. Les droites Δ et $\mathscr{D}_2$ sont-elles coplanaires ?

4. **a.** Résoudre de même le système obtenu à partir des représentations paramétriques de Δ et $\mathscr{D}_3$? Que peut-on en déduire ?

b. Les droites Δ et $\mathscr{D}_3$ sont-elles coplanaires ?

Exercice fil rouge 3 Représentations paramétriques de droites

Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

1. $\mathrm{A}(7;3;5)$ et $\mathrm{B}(4;1;4)$ **2.** $\mathrm{A}(1;1;2)$ et $\mathrm{B}(3;5;5)$

6.6 *Dans cet exercice, pour chaque question, une affirmation est proposée. On demande d'indiquer sur la copie si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte, mais toute trace de recherche sera valorisée.*

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de représentations paramétriques respectives :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4+t \\ y &=& 6+2t \\ z &=& 4-t \end{array}\right. ,\quad t\in\mathbf{R},\quad \text{et}\quad \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 8+5t' \\ y &=& 2-2t' \\ z &=& 6+t' \end{array}\right. ,\quad t'\in\mathbf{R}.$$

Affirmation 1 : Le point $\mathrm{A}(2;2;6)$ appartient à la droite $\mathscr{D}_1$.

Affirmation 2 : Le vecteur $\vec{u}(-0,2;-0,4;0,2)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_1$.

Affirmation 4 : Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont orthogonales.

Affirmation 3 : Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires.

Exercice fil rouge 4 Représentations paramétriques de droites

1. $\mathrm{A}(4;1;2)$ et $\mathrm{B}(-5;2;-2)$ **2.** $\mathrm{A}(1;\frac{3}{4};\frac{5}{8})$ et $\mathrm{B}(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8})$

6.7 On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

Le point I est le milieu de l'arête [GH] et le point J est le centre de la face ADHE.

1. Donner, sans justification, les coordonnées des huit sommets du cube dans ce repère.
2. Calculer les coordonnées des points I et J.
3. En travaillant en groupe, déterminer une représentation paramétrique de chacune des arêtes de cube.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
5. Déterminer, pour chaque droite portée par une arête du cube, les coordonnées de son intersection éventuelle avec la droite (IJ).

6.8 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(0; 2; 0), B(3; 2; 0), C(3; 0; 0), E(1; 1; 2) et H(1; 1; 0).

1. Justifier que les points O, A, B, C et H sont coplanaires.
2. Quelle est la nature du quadrilatère OABC. Justifier.
3. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de ce quadrilatère.
4. Le point H appartient-il à la droite (OB) ? À la droite (AC) ?
5. Quelle est la nature du solide OABCE ?
6. Déterminer les positions relatives des droites (EH) et (AB), puis de (EH) et (AC).
7. On admet que le volume du solide OABCE est $\dfrac{1}{3}\mathscr{A} \times \text{EH}$. Calculer ce volume.

6.9 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les points A(2; 3; 0), B(3; 6; 0), C(4; 5; 0) et D(4; 5; 2). On s'intéresse au tétraèdre ABCD.

1. **a.** Déterminer des représentations paramétriques des droites (BC) et (AD).
   b. Étudier les positions relatives de ces deux droites.
2. De manière analogue, étudier les positions relatives des droites (CD) et (AB), puis des droites (AC) et (BD).
3. Quelle propriété du tétraèdre ABCD a-t-on ainsi démontré ?

6.10 On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(\text{A}; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$. On considère les points $\text{I}(1; \frac{1}{3}; 0)$, $\text{J}(0; \frac{2}{3}; 1)$, $\text{K}\left(\frac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $\text{L}(a; 1\ 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).
2. Démontrer qu'une représentation paramétrique de la droite (KL) est :

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases} \qquad \text{avec } t' \in \mathbf{R}.$$

3. Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \dfrac{1}{4}$.

6.11 $ABCDEFGH$ est un cube de bases $ABCD$ et $EFGH$, K est le milieu de l'arête $[AE]$. M est un point de la droite (AD), N est un point de la droite (EF). Existe-t-il des positions des points M et N telles que la droite (MN) soit

1. parallèle à la droite (GK) ?
2. orthogonale à la droite (GK) ?
3. perpendiculaire à la droite (GK) ?