Thème 5 – Probabilités conditionnelles

1. Probabilité conditionnelle

Définition 1 : Probabilité de A sachant B

Considérons une expérience aléatoire et deux événements A et B où B n'est pas impossible (i.e $P(B) \neq 0$). La probabilité de l'événement A sachant B est la probabilité que l'événement A se réalise, sachant que l'événement B a été réalisé. On la note $p_B(A)$ ou parfois $P(A/B)$, où A/B est l'évènement : « Sachant que l'évènement B a été réalisé, l'évènement A se réalise ».

Exercice résolu 1 :

Un relevé des ventes chez un marchand de voiture est donné ci-dessous.

	Neuve	Occasion	Total
Française	24	26	50
Etrangère	16	34	50
Total	40	60	100

On note :
- N l'événement : « la voiture achetée est neuve ».
- F l'événement : « la voiture achetée est française ».

Traduire par une phrase chacun des événements suivants puis, en utilisant le tableau, donner leur probabilité.

1. $\overline{N}$; **2.** $N \cap F$; **3.** $N \cup F$; **4.** N/F ; **5.** F/N

Solution :

1. $\overline{N}$: « la voiture n'est pas neuve ». $P(\overline{N}) = \frac{40}{100}$.
2. $N \cap F$:« la voiture est neuve et française ». $P(N \cap F) = \frac{24}{100}$.
3. $N \cup F$: « la voiture est neuve ou française ». $P(N \cup F) = \frac{24+16+26}{100} = \frac{66}{100}$.
4. N/F : « Sachant que la voiture est française, elle est neuve ». $P(N/F) = \frac{24}{50}$.
5. F/N : « Sachant que la voiture est neuve, elle est française ». $P(F/N) = \frac{24}{40}$.

Remarque : L'exemple montre que, d'une façon générale, on a $P(N \cap F) \neq p_F(N) \neq p_N(F)$.

Proposition 1 :

Considérons une expérience aléatoire et deux événements A et B, l'évènement B étant de probabilité non nulle. La probabilité de l'événement A sachant B est donnée par la formule

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exercice résolu 2 :

Dans une population dont 40% sont des hommes, on observe que 50% personnes ont les yeux bleus et que 20% sont des hommes aux yeux bleus. On choisit une personne au hasard.
On note :
- B l'événement : « la personne a les yeux bleus ».
- H l'événement : « la personne est un homme ».

Traduire par une phrase chacun des événements suivants puis calculer leur probabilité.

1. $\overline{H}$; **2.** $B \cap H$; **3.** $B \cup H$; **4.** B/H ; **5.** H/B

Solution :

1. $\overline{H}$:« la personne n'est pas un homme ».
   $P(\overline{H}) = 1 - P(H) = 1 - 0,4 = 0,6$
2. $B \cap H$:« la personne est un homme et a les yeux bleus ».
   Selon l'énoncé, $P(B \cap H) = 0,2$
3. $B \cup H$:« la personne est un homme ou a les yeux bleus ».
   $P(B \cup H) = P(B) + P(H) - P(B \cap H) = 0,5 + 0,4 - 0,2 = 0,7$
4. B/H :« Sachant que c'est un homme, la personne a les yeux bleux ».
   $P(B/H) = \dfrac{P(B \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0,2}{0,4} = 0,5$
5. H/B :« Sachant que la personne a les yeux bleus, c'est un homme ».
   $P(H/B) = \dfrac{P(B \cap H)}{P(B)} = \dfrac{0,2}{0,5} = 0,4$

Remarque : Dans le cas où on connaît la probabilité de A sachant B et celle de B, on peut en déduire la probabilité de l'intersection $P(A \cap B)$: $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$.

Pour représenter une situation, on peut utiliser un tableau ou un arbre pondéré. Un arbre pondéré correctement construit constitue une preuve. Dans un arbre de probabilité,

- les probabilités indiquées sur les branches des sous-arbres sont des probabilités conditionnelles ;
- la somme des probabilités des branches d'un sous-arbre est toujours égale à 1.

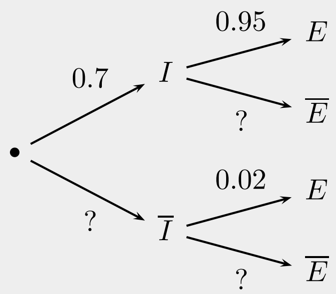
Exercice résolu 3 :

Un logiciel permet de filtrer les messages sur une messagerie électronique. Les performances annoncées sont :

- 70% des messages entrants sont indésirables ;
- 95% des messages indésirables sont éliminés ;
- 2% des messages bienvenus sont éliminés.

On note I l'évènement « Le message est indésirable »et E l'évènement « Le message est éliminé ». Représenter la situation par un arbre.

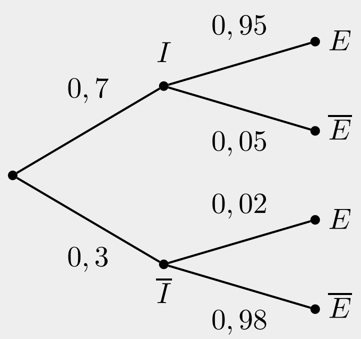
Solution : Selon l'énoncé, on a :



Sachant que dans un arbre de probabilité,

- les probabilités indiquées sur les branches des sous-arbres sont des probabilités conditionnelles ;
- la somme des probabilités des branches d'un sous-arbre est toujours égale à 1.

on en déduit l'arbre entier.



$P(I \cap E) = 0,7 \times 0,95 = 0,665$

$P(I \cap \overline{E}) = 0,7 \times 0,05 = 0.035$

$P(\overline{I} \cap E) = 0,3 \times 0,02 = 0,06$

$P(\overline{I} \cap \overline{E}) = 0,3 \times 0,98 = 0,294$

Théorème 1 : Formule des probabilités totales

Soient deux événements A et B, avec $\overline{B}$ l'événement contraire de B. L'univers des possibles est partitionné en B et $\overline{B}$. Par conséquent

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}).$$

Exercice résolu 4 :

Dans les conditions de l'exercice précédent, calculer la probabilité qu'un message soit éliminé.

Solution : Selon la formule des probabilités totales : $P(E) = P(E \cap I) + P(E \cap \overline{I}) = 0,665 + 0,06 =, 725$.

Remarque : On peut généraliser cette formule au cas où l'univers est partitionné en plus de deux événements. Par exemple, si B_1, B_2 et B_3 sont trois événement incompatibles dont l'union est égale à l'univers des possibles, pour tout événement A, $P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3)$.

2. Indépendance de deux événements

Définition 2 : Événements indépendants

Considérons une expérience aléatoire. Deux événements A et B sont indépendants s'il n'y aucun lien de causalité entre eux, c'est à dire si la réalisation de l'un n'a aucun impact sur la réalisation de l'autre.

Remarque : La définition de l'indépendance de deux événements donnée précédemment est très intuitive et correspond au concept naturel d'indépendance. En probabilités, on utilise une définition plus technique.

Définition 3 : Événements indépendants

Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Proposition 2 : Probabilités conditionnelles d'événements indépendants

Soient A et B deux évènements de probabilité non nulle.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration : Puisque $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, on a $P_B(A) = P(A)$ si et seulement si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. $\square$

Remarque : Cette propriété exprime le fait que quand des événements sont indépendants, la réalisation de l'un n'a aucun impact sur la réalisation de l'autre.

Proposition 3 : Éléments contraires et indépendance

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

Démonstration : ROC ! ! Soient A et B deux événements indépendants. Alors par définition $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. On sait que $P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(B)$, donc $P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B) = (1 - P(A))P(B) = P(\overline{A})P(B)$, ce qui prouve que $\overline{A}$ et B sont indépendants. $\square$