# Thème 5
# Probabilités Conditionnelles

Vérification des acquis

- ☐ Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.
- ☐ Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.
- ☐ Mettre en œuvre la formule des probabilités totales.
- ☐ Démontrer que si deux événements $A$ et $B$ sont indépendants, alors il en est de même pour $\overline{A}$ et $B$.

## 5.1 Activité 1 – Introduction aux probabilités conditionnelles

Dans cette activité, on se propose de découvrir la notion de probabilité conditionnelle.

### Partie A – Un peu de bon sens

On lance deux dés équilibrés à 6 faces, l'un rouge et l'un vert, et on note la somme des faces obtenues.

1. On a obtenu 6 avec le dé vert. Quelle est la probabilité que la somme des dés soit égale à 12 ? Quelle est la probabilité qu'elle soit égale à 7 ?
2. On a obtenu 1 avec le dé rouge. Quelle est la probabilité que la somme des dés soit égale à 12 ? Quelle est la probabilité qu'elle soit égale à 7 ?
3. La somme des dés est égale à 12. Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu 6 avec le dé rouge ?
4. La somme des dés est égale à 10. Quelle est la probabilité que l'on ait obtenu le même résultat avec les deux dés ?

### Partie B – Une formule à connaître

Dans un lycée de 1000 élèves, on a recensé

- 350 garçons ne portant pas de bijoux ;
- 50 garçons portant des bijoux ;
- 100 filles ne portant pas de bijoux ;
- 500 filles portant des bijoux.

On choisit au hasard un élève dans le lycée. On note :

- $F$ l'événement « l'élève choisi au hasard est une fille » ;
- $G$ l'événement « l'élève choisi au hasard est un garçon » ;
- $B$ l'événement « l'élève choisi au hasard est un élève portant des bijoux ».

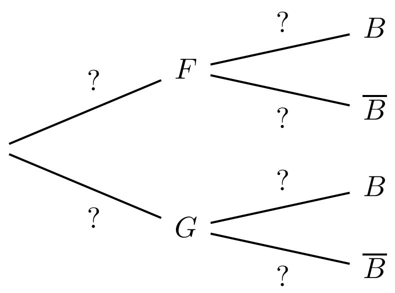
1. Donner, en lisant l'énoncé, les probabilités $P(F \cap B)$, $P(G \cap B)$, $P(F \cap \overline{B})$, $P(G \cap \overline{B})$ et $P(B)$.
2. On suppose dans cette question qu'on a interrogé un garçon. Dans ce cas, donner la probabilité que l'on ait interrogé un élève portant des bijoux. On note $P_G(B)$ cette probabilité.

**3.** Parmi les expressions suivantes, laquelle est égale à $P_G(B)$ ?

- $P(G \cap B) \times P(B)$
- $\dfrac{P(G \cap B)}{P(B)}$
- $\dfrac{P(G \cap B)}{P(G)}$

**4.** En adaptant la formule observée dans la question précédente, calculer $P_F(B)$, la probabilité que l'élève choisi porte un bijou sachant qu'on a interrogé une fille.

**5.** Recopier et compléter l'arbre suivant en plaçant correctement $P(G)$, $P(F)$, $P_G(B)$, $P_F(B)$, ainsi que leur valeur.




## 5.2 Activité 2 – Utilisation d'un diagramme de Venn

Dans une entreprise de 33 salariés, tout le monde fait du sport. Ils ont le choix entre l'athlétisme, le badminton, et le cyclisme.

- 8 salariés pratiquent exclusivement de l'athlétisme ;
- 10 salariés pratiquent exclusivement du badminton ;
- 7 salariés pratiquent exclusivement du cyclisme ;
- 3 salariés pratiquent de l'athlétisme et du badminton mais pas de cyclisme ;
- 2 salariés pratiquent du badminton et du cyclisme mais pas d'athlétisme ;
- 2 salariés pratiquent de l'athlétisme et du cyclisme mais pas de badminton.

**1.** Combien de salariés pratiquent les trois sports ?

**2.** Représenter cette situation à l'aide d'un diagramme de Venn.

**3.** On interroge au hasard un salarié de l'entreprise. On note A :« le salarié interrogé pratique l'athlétisme » ; B :« le salarié interrogé pratique le badminton » ; C :« le salarié interrogé pratique le cyclisme ».

A la lecture du diagramme de Venn, donner $P_A(B), P_B(C), P_C(A), P_B(A)$

**4.** Est-il vrai que $P_A(B) = P_B(A)$ ?

## 5.3 Activité 3 – Une application des probabilités conditionnelles en médecine

Les probabilités ont des applications directes en médecine. Dans cet exercice, nous allons étudier l'exemple du dépistage du cancer du sein chez la femme. Un des moyens utilisés pour repérer un éventuel cancer du sein est la mammographie. En cas de mammographie suspecte (dite positive), on peut effectuer une biopsie, opération douloureuse qui nécessite une anesthésie générale.

### Partie A

Le tableau ci-dessous donne les résultats d'un ensemble de 1000 femmes ayant subi une mammographie suite à un examen médical suspect.

| | Cancer | Pas de cancer | Total |
|---|---|---|---|
| Mammographie positive | 74 | 110 | 184 |
| Mammographie négative | 6 | 810 | 816 |
| Total | 80 | 920 | 1000 |

On choisit au hasard une femme parmi cet échantillon et on considère les événements $C$ « présence d'un cancer » et $M$ « mammographie positive ».

1. Calculer la probabilité de l'événement $C$.
2. Donner la notation mathématique de la probabilité que la mammographie soit positive sachant qu'il y a un cancer, puis calculer cette probabilité.
3. Même question pour la probabilité que la mammographie soit négative sachant qu'il y a un cancer.
4. Le résultat d'une mammographie est positif. Selon cet échantillon, quelle est la probabilité que la patiente concernée ait un cancer ? En tant que médecin, conseilleriez-vous alors de faire une biopsie ?
5. Le résultat d'une mammographie est négatif. Selon cet échantillon, quelle est la probabilité que la patiente concernée ait un cancer ? En tant que médecin, conseilleriez-vous alors de faire une biopsie ?

## Partie B

Une seconde étude porte sur 1000 femmes ayant subi une mammographie de routine, sans présenter de symptômes suspects.

| | Cancer | Pas de cancer | Total |
|---|---|---|---|
| Mammographie positive | 1 | 120 | 121 |
| Mammographie négative | 0 | 879 | 879 |
| Total | 1 | 999 | 1000 |

On utilisera dans cette partie les mêmes notations que dans la partie précédente, mais les résultats seront différents.

1. Calculer la probabilité de l'événement $C$.
2. Donner la notation mathématique de la probabilité que la mammographie soit positive sachant qu'il y a un cancer, puis calculer cette probabilité.
3. Même question pour la probabilité que la mammographie soit négative sachant qu'il y a un cancer.
4. Le résultat d'une mammographie est positif. Selon cet échantillon, quelle est la probabilité que la patiente concernée ait un cancer ? En tant que médecin, conseilleriez-vous alors de faire une biopsie ?
5. Le résultat d'une mammographie est négatif. Selon cet échantillon, quelle est la probabilité que la patiente concernée ait un cancer ? En tant que médecin, conseilleriez-vous alors de faire une biopsie ?

## Partie C

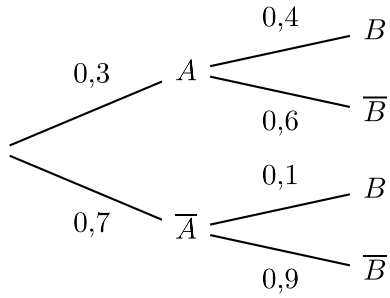
Le texte ci-dessous est extrait d'un journal médical anglo-saxon réputé sérieux.

> Dans environ un cas sur cinq (soit 20%), la mammographie d'une femme présentant effectivement un cancer du sein est négative.
> En conséquence, si on s'abstient de recommander une biopsie suite à une mammographie négative, on risque dans un cas sur cinq de ne pas détecter un cancer existant.

Que pensez-vous de ce raisonnement ?

## Formule des probabilités totales

**5.4** On s'intéresse à l'arbre pondéré ci-contre :




1. Donner $P_A(B)$ et $P_{\overline{A}}(B)$.
2. A l'aide d'une formule du cours, donner $P(B)$.

**5.5** Pour engager des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves il y a 60% de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats des tests, l'entreprise engage 70% des garçons candidats et 80% des filles candidates. On choisit un candidat au hasard et on définit les événements suivants : $F$ « le candidat est une fille », $G$ « le candidat est un garçon », $E$ « le candidat est engagé ».

1. Traduire en langage mathématique les informations données dans l'énoncé.
2. a. Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire ?
   b. Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire ?
   c. Calculez la probabilité que ce candidat soit engagé.
3. Sachant que le candidat choisit a été engagé, calculez la probabilité que ce soit un garçon.

**5.6** Dans cet exercice les probabilités demandées seront données sous forme décimale, éventuellement arrondies à $10^{-3}$ près. Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de classes de Terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 30% des filles et 40% des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note $A$ l'événement : "l'élève choisi fume" et $F$ l'événement : "l'élève choisi est une fille". Quelle est la probabilité que cet élève soit un garçon ? Une fille qui fume ? Un garçon qui fume ?
2. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
3. Déduire des questions précédentes, en justifiant soigneusement, que $P(A) = 0,34$.
4. L'enquête permet de savoir que :
   - Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument.
   - Parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.

   On note $B$ l'événement : "l'élève choisi a des parents fumeurs".

   a. Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$. En déduire $P(B)$.
   b. Calculer $P_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs. Calculer $P_{\overline{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

## Événements indépendants

**5.7** $A, B$ sont des événements tels que $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,4$ et $P(A \cup B) = 0,7$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En déduire $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
3. Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

**5.8** Une enquête est faite auprès de 2000 élèves d'un lycée sans internat, afin de savoir s'ils disposent d'un ordinateur personnel. Dans ce lycée, 46% sont demi-pensionnaires. L'enquête révèle que :

- 40% des élèves de ce lycée disposent d'un ordinateur personnel chez eux ;
- parmi les lycéens disposant d'un ordinateur personnel, 432 ne sont pas demi-pensionnaires.

**1.** Recopier et compléter le tableau d'effectifs suivant :

| | Demi-pensionnaire | Non demi-pensionnaire | Total |
|---|---|---|---|
| Ordinateur | | | |
| Pas d'ordinateur | | | |
| Total | | | 2000 |

**2.** On choisit au hasard un élève du lycée. On considère les événements suivants : $D$ : "L'élève est demi-pensionnaire" ; $O$ : "L'élève dispose d'un ordinateur personnel".

- **a.** Déterminer les probabilités des événements $D$, $O$ et $D \cap O$.
- **b.** Les événements $D$ et $O$ sont ils indépendants ?
- **c.** Déterminer $P(D \cup O)$.
- **d.** Déterminer $P_O(D)$.

**5.9** Dans un lycée, 48 élèves se sont inscrits dans les clubs photo et théâtre. On en compte 32 dans le club théâtre et 24 dans le club photo.
On sort au hasard la fiche d'un élève inscrit.
Soient $T$ et $F$ les événements : "être adhérent du club Théâtre" et "être adhérent du club Photo".

**1.** Déterminer $P(T)$, $P(F)$ et en déduire $P(T \cap F)$.

**2.** Les événements $T$ et $F$ sont-ils indépendants ?

**5.10** Dans ce problème, on s'intéressera au braconnage du lion dans une réserve animalière.

### Partie A – Le lion

Un lion équipé d'un bracelet électronique est pisté par les vétérinaires de la réserve. Ce bracelet émet un signal d'alarme, inoffensif pour l'animal, dès que ce dernier quitte les frontières de la réserve, afin de prévenir le braconnage. Ainsi, on a observé que ce lion quittait la réserve avec un probabilité de 0,05. Quand le lion quitte la réserve, le bracelet émet un signal d'alarme avec une probabilité de 0,99. Quand le lion ne quitte pas la réserve, il arrive que le bracelet émette un faux signal d'alarme, avec une probabilité de 0,005.
Le bracelet n'a pas émis de signal d'alarme. Calculer la probabilité que le lion ait quitté la réserve. Arrondir le résultat à $10^{-5}$.

### Partie B – Le braconnier

Non loin des frontières de cette réserve, plusieurs braconniers attendent patiemment que certains lions sortent des limites de la réserve pour pouvoir les tuer et ainsi récupérer leur peau et en faire des trophées. L'un de ces braconniers parcourt aléatoirement les frontières de la réserve, aidé de plusieurs guides.
On estime qu'il peut rencontrer un lion avec une probabilité de $0,1$. Etant donné les frais qu'engagent ce genre d'entreprise, il décide de ne faire que 10 fois le tour de la réserve. On considère que chacun de ces tours ne dépend pas des tours qu'il a déjà pu effectuer.
Calculer la probabilité que le braconnier rencontre au moins un lion lors de ses dix tournées. Arrondir le résultat à $10^{-4}$.

**5.11** Dans une population contenant trois quarts de tricheurs, on choisit une personne pour jouer à « Pile » ou « Face ». Cette personne parie sur « Pile » et obtient « Pile » . Quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?
On admet que tout tricheur sachant tricher gagne à tous les coups.

## Sujets de baccalauréat

**5.12** *D'après Amérique du Sud, novembre 2010*
Un internaute souhaite faire un achat par l'intermédiaire d'internet. Quatre sites de vente, un français, un allemand, un canadien et un indien présentent le matériel qu'il souhaite acquérir. L'expérience a montré que la probabilité qu'il utilise chacun de ces sites vérifie les conditions suivantes (les initiales des pays désignent les événements « l'achat s'effectue dans le pays ») : $P(F) = P(A)$, $P(F) = \frac{1}{2}P(C)$ et $P(C) = P(I)$.

1. Calculer les quatre probabilités $P(F)$, $P(A)$, $P(C)$ et $P(I)$.
2. Sur chacun des quatre sites, l'internaute peut acheter un supplément pour son matériel. Ses expériences précédentes conduisent à formuler ainsi les probabilités conditionnelles de cet événement, noté $S$ :

$$P_F(S) = 0,2 \quad ; \quad P_A(S) = 0,5 \quad ; \quad P_C(S) = 0,1 \quad ; \quad P_I(S) = 0,4$$

   a. Déterminer $P(S \cap A)$.
   b. Montrer que $p(S) = \frac{17}{60}$.
   c. L'internaute a finalement acheté un supplément. Déterminer la probabilité qu'il l'ait acheté sur le site canadien.

**5.13** *Adapté de Polynésie, juin 2011*
Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$ ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$ ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel $n$ non nul :

- $G_n$ l'événement « le joueur gagne la $n$-ième partie » ;
- $p_n$ la probabilité de l'événement $G_n$.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite $(p_n)$ quand $n$ tend vers $+\infty$. On admettra le résultat.
7. Déterminer à l'aide de la calculatrice la première valeur de l'entier naturel $n$ pour laquelle on a $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$ ?

**5.14** *Liban, mai 2016*
Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.
Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.
*Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à* $10^{-3}$ *près.*

### Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

### Partie B

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.
Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est $0,24$ ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est $0,235$.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

**5.15** *Liban, mai 2015*
En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.
Parmi les 1200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- $A$ l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- $B$ l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- $V$ l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. **a.** Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   **b.** Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est $0,529$.
4. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est $0,4$.
   L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1200 réponses.
   Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

**5.16** *La Réunion, juin 2010*
Dans cet exercice, tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

## Partie A

On dispose d'un dé cubique $A$ parfaitement équilibré possédant une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Un jeu consiste à lancer deux fois de suite et de manière indépendante ce dé. On note à chaque lancer la couleur de la face obtenue.

1. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient noires.
2. Soit l'événement $C$ : « à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur ». Démontrer que la probabilité de l'événement $C$ est égale à $\frac{7}{18}$.
3. Calculer la probabilité pour qu'à l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues soient de couleurs différentes.
4. à l'issue d'un jeu, sachant que les deux faces obtenues sont de la même couleur, quelle est la probabilité pour que les deux faces obtenues soient vertes ?

## Partie B

On dispose d'un second dé cubique $B$ équilibré présentant quatre faces vertes et deux faces noires. Le nouveau jeu se déroule de la manière suivante : on lance le dé B.

- Si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé $B$ et on note la couleur de la face obtenue.
- Si la face obtenue est noire, on lance le dé $A$ et on note la couleur de la face obtenue.

1. **a.** Construire un arbre de probabilités traduisant cette situation.
   **b.** Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer, sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?
2. Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?