Thème 4 – Les nombres complexes

Définition 1 : Ensemble des nombres complexes

On appelle ***ensemble des nombres complexe*** *l'ensemble des nombres de la forme $x + iy$, où $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ et i est un nombre vérifiant $i^2 = -1$. Cet ensemble est noté* $\mathbf{C}$ *.*

Théorème 1 (admis) :

Les règles de calculs (addition, développement, factorisation) valables pour les nombres réels sont aussi valables pour les nombres complexes.

Exercice résolu 1 :

On donne $z_1 = -2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 - \mathrm{i}$.
Calculer :

1. $z_1 + z_2$; **2.** $2z_1$; **3.** $z_1 \times z_2$.

Solution :

1. $z_1 + z_2 = (-2 + 3\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) = -2 + 4 + \mathrm{i}(3 - 1) = 2 + 2\mathrm{i}$;
2. $2z_1 = 2(-2 + 3\mathrm{i}) = -4 + 6\mathrm{i}$;
3. $z_1 \times z_2 = (-2 + 3\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = -8 + 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = -8 + 14\mathrm{i} - (-3) = -5 + 14\mathrm{i}$.

Définition 2 : Forme algébrique, partie réelle et partie imaginaire

L'écriture $x + iy$ d'un nombre complexe est appelée sa ***forme algébrique*** *.*
- *Le réel x est appelé* ***partie réelle*** *du complexe z et noté $\mathfrak{Re}(z)$.*
- *Le réel y est appelé* ***partie imaginaire*** *du complexe z et noté $\mathfrak{Im}(z)$.*

Exemples : Soit le nombre complexe $z = 2 - \mathrm{i}$.
Sa partie réelle est $\mathfrak{Re}(z) = 2$ et sa partie imaginaire est $\mathfrak{Im}(z) = -1$.

Théorème 2 (admis) : Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires sont égales.

Définition 3 : Imaginaire pur, Complexe conjugué

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
Si y est nul, le nombre z est un ***nombre réel*** *. En particulier, l'ensemble des réels est donc inclus dans celui des nombres complexes : $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.*
Si x est nul et $y \neq 0$, le nombre z est un ***imaginaire pur*** *.*
On appelle ***conjugué de z*** *le nombre $\overline{z} = x - iy$.*

Exemples :
- Le conjugué du nombre complexe $z_1 = -2 + 1,5\mathrm{i}$ est $\overline{z_1} = -2 - 1,5\mathrm{i}$.
- Le conjugué d'un nombre réel est égal à lui-même. Par exemple, si $z_2 = 2,5$, alors $\overline{z_2} = z_2$.
- Le conjugué d'un imaginaire pur est son opposé. Par exemple, si $z_3 = 5\mathrm{i}$, alors $\overline{z_3} = -5\mathrm{i} = -z_3$.

Théorème 3 : Propriétés sur les conjugués

Soit z un nombre complexe. On a les identités suivantes :

1. $\overline{\overline{z}} = z$;

2. $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$;

3. $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$;

4. $z - \overline{z} = 2i\mathfrak{Im}(z)$;

La deuxième identité sert, entre autre, à rendre réel des dénominateurs afin d'obtenir des formes algébriques.

Démonstration : On démontre ces propriétés en utilisant les formes algébriques.
Soit $z = x + \mathrm{i}y$.

1. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{x + \mathrm{i}y}} = \overline{x - \mathrm{i}y} = x + \mathrm{i}y$.

2. $z \times \overline{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$.

3. $z + \overline{z} = (x + \mathrm{i}y) + (x - \mathrm{i}y) = 2x = 2\mathfrak{Re}(z)$.

4. $z - \overline{z} = (x + \mathrm{i}y) - (x - \mathrm{i}y) = 2\mathrm{i}y = 2\mathrm{i}\mathfrak{Im}(z)$.

□

Exercice résolu 2 :

Mettre sous forme algébrique les nombres $z_3 = \dfrac{2}{3+\mathrm{i}}$ et $z_4 = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{5-6\mathrm{i}}$.

Solution :

$z_3 = \dfrac{2}{3+\mathrm{i}} = \dfrac{2(3-\mathrm{i})}{(3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})} = \dfrac{6-2\mathrm{i}}{9-\mathrm{i}^2} = \dfrac{6-2\mathrm{i}}{10} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.

$z_4 = \dfrac{1+2\mathrm{i}}{5-6\mathrm{i}} = \dfrac{(1+2\mathrm{i})(5+6\mathrm{i})}{(5-6\mathrm{i})(5+6\mathrm{i})} = \dfrac{5+6\mathrm{i}+10\mathrm{i}+12\mathrm{i}^2}{5^2-(6\mathrm{i})^2} = \dfrac{5+16\mathrm{i}-12}{25-36(-1)} = \dfrac{-7+16\mathrm{i}}{61}$.

Théorème 4 : Conjugaison, produit et quotient

Quels que soient les complexes z et z', on a

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \text{ et si } z' \neq 0, \overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

Démonstration : On démontre ces propriétés en utilisant les formes algébriques. (voir activité $\boxed{4.3}$). □

Théorème 5 : Complexes et Second degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- *si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;*
- *si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $x = -\dfrac{b}{2a}$;*
- *si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbf{R}$ mais admet deux solutions conjuguées dans $\mathbf{C}$: $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 - \overline{z_1} = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.*

Démonstration : On démontre cette propriété comme dans le cas $\Delta > 0$, en constatant que si Δ est négatif, alors on peut écrire $\Delta = i^2(-\Delta)$ et donc, symboliquement, $\sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta}$. □

Exercice résolu 3 :

On considère l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ où z est un nombre.
Résoudre cette équation dans $\mathbf{C}$.

Solution : Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.
L'équation a donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

Remarque : Puisque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution dans $\mathbf{R}$.