Thème 4
Les nombres complexes

Vérification des acquis

- ☐ Déterminer les racines complexes d'une équation du second degré.
- ☐ Donner la forme algébrique d'un complexe.
- ☐ Calculer le conjugué d'un complexe et savoir utiliser les propriétés associées.

4.1 Activité 1 – Un algorithme pour les équations du 2nd degré

L'algorithme ci-contre automatise la résolution d'une équation du second degré.

1. Compléter les instructions conditionnelles.
2. Appliquer manuellement l'algorithme à l'équation $5x^2 - x + 2 = 0$.
3. Programmer cet algorithme à la calculatrice puis tester les équations suivantes :
   - **a.** $x^2 - 2x + 1 = 0$,
     (Solutions $x_0 = x_1 = 1$).
   - **b.** $x^2 - 5x + 6 = 0$,
     (Solutions $x_0 = 2$ et $x_1 = 3$).
   - **c.** $x^2 - 4x + 13 = 0$,
     (Solutions $x_0 = 2 - 3i$ et $x_1 = 2 + 3i$).

Initialisation
Saisir a, b, c, trois réels
D prend la valeur $b^2 - 4ac$
Traitement
Si ... alors :
    x_0 prend la valeur $(-b - \sqrt{D})/(2a)$
    x_1 prend la valeur $(-b + \sqrt{D})/(2a)$
Fin Si
Si ... alors :
    x_0 prend la valeur $-b/(2a)$
    x_1 prend la valeur x_0
Fin Si
Si ... alors :
    D prend la valeur $-D$
    x_0 prend la valeur $(-b - \mathrm{i}\sqrt{D})/(2a)$
    x_1 prend la valeur $(-b + \mathrm{i}\sqrt{D})/(2a)$
Fin Si
Afficher x_0 et x_1

4.2 Activité 2 – Quelques propriétés

On s'intéresse aux propriétés du conjugué d'un produit et d'un quotient.

1. Soient $a = 1 + 3\mathrm{i}$ et $b = -2 - 2\mathrm{i}$ deux nombres complexes.
   - **a.** Mettre sous forme algébrique le produit ab et le quotient $\frac{a}{b}$.
   - **b.** Déterminer les conjugués du produit $a \times b$ et du quotient $\frac{a}{b}$, notés $\overline{a \times b}$ et $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}$.
   - **c.** Déterminer les conjugués $\overline{a}$ et $\overline{b}$.
   - **d.** Mettre sous forme algébrique le produit $\overline{a} \times \overline{b}$ et le quotient $\frac{\overline{a}}{\overline{b}}$.
   - **e.** Vérifier que $\overline{a \times b} = \overline{a} \times \overline{b}$ et que $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$.
2. Prouver que, quels que soient les complexes $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$ et si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.

4.3 **Activité 3 – Produit d'un complexe par son conjugué**

1. On considère les complexes $a = 2 + \mathrm{i}$, $b = -3 + 2\mathrm{i}$ et $c = -5 - 5\mathrm{i}$. Déterminer les conjugués $\overline{a}$, $\overline{b}$ et $\overline{c}$, puis calculer les produits $a\overline{a}$, $b\overline{b}$ et $c\overline{c}$.
2. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ un complexe quelconque. Rappeler la formule du conjugué $\overline{z}$ puis simplifier au maximum le produit $z\overline{z}$. Commenter la formule obtenue.

Exercice fil rouge 1 Équations du second degré

Résoudre dans $\mathbf{C}$ les équations suivantes.

1. $z^2 + 4 = 0$; **2.** $z^2 + z + 1 = 0$; **3.** $5z^2 + 8z + 3 = 0$; **4.** $2z^2 - 2z = -3$.

4.4 Soient $z = 2 + 3\mathrm{i}$ et $z' = -1 + \mathrm{i}$. Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique : $z + z'$; $2z - 3z'$; $\overline{z}$; $\overline{z'}$; $5\overline{z}$-z'.

Exercice fil rouge 2 Équations du second degré

1. $z^2 + 3 = 0$; **2.** $-z^2 - 3z - 1 = 0$.

4.5 Soit $z = x + \mathrm{i}y$. Simplifier au maximum les nombres complexes $\overline{z}$; $-z$; $-\overline{z}$; $\overline{\overline{z}}$; $z\overline{z}$; $z + \overline{z}$ et $z - \overline{z}$.

4.6 Calculer le produit de chacun des nombres complexes suivants par i :
$z_1 = 2 + \mathrm{i}$; $z_2 = -5 + 3\mathrm{i}$; $z_3 = 12 - 5\mathrm{i}$; $z_4 = -7 - \mathrm{i}\sqrt{13}$; $z_5 = \sqrt{2} + \frac{1}{4}\mathrm{i}$.

Exercice fil rouge 3 Équations du second degré

1. $9z^2 + 12z + 4 = 0$; **2.** $-2z^2 + 4z - 10 = 0$.

4.7 Soient $z = 2 - 3\mathrm{i}$, $z' = -4 - \mathrm{i}$. Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants. Utiliser la calculatrice pour vérifier chaque résultat.

$$z \times z' \quad ; \quad z^2 \quad ; \quad (z')^3 \quad ; \quad \frac{1}{z} \quad ; \quad \frac{1}{z'} \quad ; \quad \frac{z}{z'} \quad ; \quad \frac{1+z}{1-z}.$$

4.8 Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants. Utiliser la calculatrice pour vérifier chaque résultat.

$$\frac{1}{1-\mathrm{i}} \quad ; \quad -\mathrm{i} + \frac{1}{2\mathrm{i}} \quad ; \quad \frac{1-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} \quad ; \quad \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}.$$

Exercice fil rouge 4 Équations du second degré

1. $\frac{1}{2}z^2 = 5z - 17$; **2.** $3z^2 + 10 = 4z$.

4.9 Déterminer la solution complexe z_0 de l'équation $\dfrac{z+1}{z-1} = 1 + \mathrm{i}$.

4.10 Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $\left\{ \begin{array}{rcl} z_1 + z_2 & = & 3 + 2\mathrm{i} \\ 2z_1 - 3z_2 & = & -9 - \mathrm{i} \end{array} \right.$.

4.11 On s'intéresse aux algorithmes ci-dessous, où l'on manipule des listes de deux nombres.

Algorithme 1

Saisir (a, b), une liste de deux réels Affecter à b la valeur $-b$ Afficher (a, b)

Algorithme 2

Saisir (a, b) et (c, d), listes de deux réels Affecter à s_1 la valeur $a + c$ Affecter à s_2 la valeur $b + d$ Afficher (s_1, s_2)

Algorithme 3

Saisir (a, b) et (c, d), listes de deux réels Affecter à d_1 la valeur $a - c$ Affecter à d_2 la valeur $b - d$ Afficher (d_1, d_2)

Algorithme 4

Saisir (a, b) et (c, d), listes de deux réels Affecter à p_1 la valeur $ac - bd$ Affecter à p_2 la valeur ... Afficher (p_1, p_2)

1. Appliquer l'algorithme 1 avec l'entrée $(2; 1)$, puis les algorithmes 2 et 3 avec les entrées $(2; 1)$ et $(1; 3)$, dans cet ordre.
2. Dans ces algorithmes, quel type d'objet est représenté par une liste de deux nombres réels ?
3. Expliciter l'opération effectuée par chacun de ces algorithmes.
4. Compléter l'algorithme 4, puis l'appliquer avec les entrées $(2; 1)$ et $(1; 3)$.
5. Écrire un algorithme calculant le quotient de deux « listes ».

4.12 Le nombre imaginaire pur i est parfois noté $\sqrt{-1}$. Cette notation a toutefois des inconvénients notables, illustrés par les exemples ci-dessous.

1. **a.** Rappeler la formule de décomposition de la racine carrée d'un produit $\sqrt{ab}$. Donner un exemple de son utilisation.

   b. Sans utiliser la formule précédente, simplifier au maximum les expressions $\sqrt{(-1) \times (-1)}$ et $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ (on pourra utiliser la notation i).

   c. La formule de la question a est-elle valable pour $a = b = -1$?
2. **a.** Rappeler la formule de décomposition de la racine carrée d'un quotient $\sqrt{\frac{a}{b}}$. Donner un exemple de son utilisation.

   b. Par la méthode habituelle, mettre sous forme algébrique la fraction $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{\mathrm{i}}$.

   c. En utilisant la formule de la question a, simplifier au maximum la fraction $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ et écrire le résultat sous forme algébrique.

   d. Les résultats des questions b et c sont-ils cohérents ? Si non, donner une explication à cette incohérence.

4.13 On a vu dans l'exercice précédent qu'on peut représenter un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ par une liste ordonnée de deux réels, $(x; y)$. En se plaçant dans un repère orthonormé, appelé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ pour éviter la confusion entre le complexe i et le vecteur $\vec{\imath}$, on peut donc représenter le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ par le point M de coordonnées $(x; y)$. Le point M est appelé *point image* du complexe z et le complexe z est appelé l'*affixe* du point M.
Dans cet exercice, on utilisera un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1cm.

1. **a.** Placer les points images A et B des complexes $a = 2 + \mathrm{i}$ et $b = 1 + 3\mathrm{i}$.
   b. Placer les points C et D de coordonnées respectives $(-3; 1)$ et $(-2; -1)$, puis donner leurs affixes c et d.
2. **a.** Où se situent les points images des nombres réels ?
   b. Où se situent les points images des nombres imaginaires purs ?
3. **a.** Déterminer les conjugués $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$.
   b. Placer les points A', B', C' et D', images respectives des complexes $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$.
   c. La conjugaison correspond à une transformation du plan bien connue. à partir des exemples précédents, conjecturer laquelle.
4. **a.** Calculer le complexe $e = a + b$, puis placer son point image E.
   b. Calculer le complexe $f = c + d$, puis placer son point image F.
   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature des quadrilatères $OAEB$ et $OCFD$?
   d. Soient z et z' deux nombres complexes, M et M' leurs points images. Conjecturer une propriété concernant le point image de la somme $z + z'$.

Sujet du baccalauréat

4.14 *Métropole, Juin 2014*
On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. **a.** Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.
   b. Soit a le nombre complexe tel que $a = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$. Donner la forme algébrique de a^2.
   c. En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
2. **Restitution organisée de connaissances**
   On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ où $x \in \mathbf{R}$ et $y \in \mathbf{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe z défini par $z = x - \mathrm{i}y$.
   Démontrer que :
   - Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
   - Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
3. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E).
   En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) admet au plus quatre solutions.