Thème 3
La fonction exponentielle

Vérification des acquis

- ☐ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.
- ☐ Connaître le sens de variation, la représentation graphique et les limites aux bornes de l'ensemble de définition de la fonction exponentielle.
- ☐ Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.

3.1 Activité 1 – Variations et représentation graphique

Dans cet exercice, on admet qu'il existe une fonction f définie, continue (c'est-à-dire que l'on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon) et dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Nous allons déduire de cette définition plusieurs propriétés de la fonction f.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.
   - **a.** En admettant que la dérivée de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est la fonction $x \mapsto -f(-x)$ et en utilisant la définition de la fonction f, déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
   - **b.** Que peut-on en déduire pour la fonction g ?
   - **c.** En calculant $g(0)$, en déduire l'expression de $g(x)$ pour tout nombre réel x.
   - **d.** En déduire, en raisonnant par l'absurde, que, pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.

   Propriété 1 : f ne s'annule pour aucun réel x.

2. On sait que $f(0) = 1$ et que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$.
   - **a.** Supposons qu'il existe un réel $a > 0$ tel que $f(a) < 0$. Que peut-on en déduire pour la fonction f sur l'intervalle $[0; a]$? (on attend une réponse intuitive).
   - **b.** Supposons de même qu'il existe un réel $a < 0$ tel que $f(a) < 0$. Que peut-on en déduire pour la fonction f sur l'intervalle $[a; 0]$? (réponse intuitive attendue).
   - **c.** Conclure sur le signe de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
   - **d.** En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$.

   Propriété 2 : f est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

3. Soit (d) la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f au point d'abscisse 0.
   - **a.** Déterminer une équation de (d).
   - **b.** Dresser le tableau de variation de la fonction φ définie pour tout nombre réel x par $\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$.
   - **c.** En déduire le signe de φ puis les positions relatives de $\mathscr{C}$ et (d).

   Propriété 3 : La courbe de f est au-dessus de sa tangente en 0.

4. A l'aide des éléments précédents, proposer une représentation graphique possible pour la fonction f.

3.2 Activité 2 – Unicité de la fonction exponentielle

Dans cet exercice, on admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Nous allons démontrer qu'il n'existe qu'une seule fonction vérifiant ces propriétés.
Supposons que f et g soient deux fonctions telles que $f' = f$, $g' = g$ et $f(0) = g(0) = 1$. Considérons alors la fonction h définie pour tout nombre réel x par

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1. À l'aide d'une propriété de l'activité 1, justifier que la fonction h est définie sur $\mathbf{R}$.
2. En utilisant la définition des fonctions f et g, simplifier au maximum l'expression de $h'(x)$.
3. Que peut-on en déduire pour la fonction h ?
4. En calculant $h(0)$, en déduire l'expression de $h(x)$ pour tout nombre réel x.
5. Conclure.

Dans la suite, on appelle *fonction exponentielle* et on note exp l'unique fonction définie sur $\mathbf{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

3.3 Activité 3 – Tracé approché de la représentation graphique

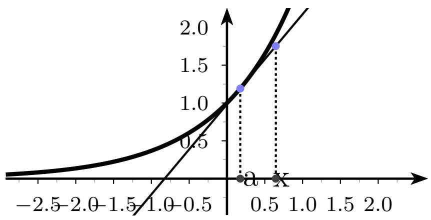
On a vu dans les activités précédentes qu'il existe une unique fonction, notée exp, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $\exp(0) = 1$ et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$. Dans cette activité, nous allons utiliser un algorithme pour construire approximativement sur l'intervalle $[0; 1]$ la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction exp.

Partie A – Quelques éléments théoriques

On appelle $\mathscr{D}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction exp au point d'abscisse 0.

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en a.
2. On admet que la tangente à $\mathscr{C}$ en a est une *approximation affine* de la fonction exp en a.

   Autrement dit, pour x proche de a, $\exp(x) \approx \exp'(a)(x - a) + \exp(a)$



   a. En posant $x = a + h$, déduire de l'approximation précédente que $\exp(a + h) \approx \exp'(a) \times h + \exp(a)$.
   b. En utilisant une propriété de la fonction exp, factoriser cette expression.
3. On choisit pour cette question $h = 0,1$.
   a. Sachant que $\exp(0) = 1$, déduire de la question précédente que $\exp(0,1) \approx 1,1$.
   b. De la même manière, déterminer une approximation de $\exp(0,2)$ et $\exp(0,3)$.

On peut ainsi construire successivement des approximations de plusieurs images par la fonction exponentielle. Cette construction, connue sous le nom de *méthode d'Euler*, est mise en œuvre dans l'algorithme de la partie B.

Partie B – Un algorithme pour la méthode d'Euler

1. Expliquer, en lien avec la méthode vue dans la partie A, les rôles des nombres x et y dans cet algorithme.
2. Le nombre h, entré au début de l'algorithme, est appelé le *pas*.
   - **a.** Que se passe-t-il si $h = 0$? Si $h = 1$?
   - **b.** Exprimer, en fonction de h, les valeurs successives prises par x.
   - **c.** Expliquer pourquoi, avec $h \in]0;1]$, il est certain que l'algorithme s'arrêtera.

Initialisation :	Saisir h, un réel
	x prend la valeur 0
	y prend la valeur 1
	Placer le point (x, y)
Traitement :	Tant que $x < 1$ faire :
	x prend la valeur $x + h$
	y prend la valeur $y \times (1 + h)$
	placer le point (x, y)
	Fin Tant que

3. Appliquer l'algorithme avec $h = 0,5$ puis tracer la courbe ainsi obtenue. On placera les points dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 5cm. orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 5cm.
4. Appliquer l'algorithme avec $h = 0,1$ puis tracer la courbe ainsi obtenue. On placera les points dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 5cm.
5. Comparer et commenter les deux courbes.
6. Quelle modification faudrait-il apporter à l'algorithme pour tracer une courbe sur l'intervalle $[0; 2]$?

$\boxed{3.4}$ Activité 4 – Propriétés algébriques

Soit exp la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $\exp(0) = 1$ et pour tout réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$. Dans cet exercice, nous allons déduire de la définition de exp des propriétés algébriques fondamentales.

On rappelle qu'on a démontré dans l'activité 1 que, pour tout réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ et que par conséquent $\exp(x)$ n'est jamais égal à 0.

1. On a démontré que la fonction exp ne s'annule jamais sur $\mathbf{R}$. On peut alors considérer la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ où x est la variable et y un nombre **fixé** quelconque.
   - **a.** En admettant que la dérivée de $x \mapsto \exp(x+y)$ est $x \mapsto \exp(x+y)$, démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = 0$.
   - **b.** Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   - **c.** Calculer $f(0)$. En déduire l'expression de la fonction f pour tout nombre réel x.
   - **d.** En déduire que pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.
2. Exprimer, pour tout nombre réel x, $\exp(-x)$ en fonction de $\exp(x)$.
3. À l'aide des propriétés précédentes, prouver que, pour tous nombres réels x et y, $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
4. On démontrera plus tard que, pour tout nombre réel x et tout entier naturel n, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$. Posons $\mathrm{e} = \exp(1)$. Comment peut-on alors écrire, pour tout entier naturel n, $\exp(n)$?
   A quelles propriétés sont similaires celles de la fonction exponentielle ?

Exercice fil rouge 1 Opérations algébriques

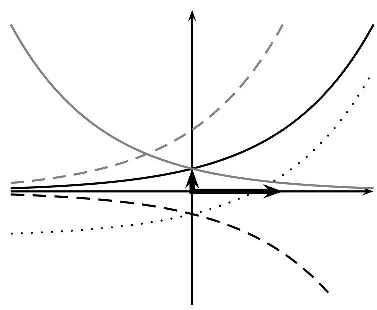
Rappel : On note e le nombre exp(1).
Simplifier au maximum les expressions suivantes : **1.** $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x}$; **2.** $\mathrm{e}\mathrm{e}^x$; **3.** $(\mathrm{e}^x)^5(\mathrm{e}^{-2x})^2$.

Représentation graphique

Exercice fil rouge 2 Opérations algébriques

1. $(\mathrm{e}^{-x})^2$; **2.** $\sqrt{\mathrm{e}^{-2x}}$; **3.** $\mathrm{e}^{-3x+1}(\mathrm{e}^x)^3$.

3.5 Reconnaître parmi les courbes tracées ci-contre celles des fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$, $x \mapsto -\mathrm{e}^x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x - 2$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$.



Exercice fil rouge 3 Opérations algébriques

1. $\dfrac{(\mathrm{e}^x)^3}{\mathrm{e}^{2x}}$; **2.** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{-x}}$; **3.** $\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2-x}}$; **4.** $\dfrac{\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{e}}{(\mathrm{e}^{-x})^2}$.

3.6 Dans cet exercice, on s'intéresse à la famille des fonctions f_k définies sur $\mathbf{R}$ et pour tout entier relatif k par $f_k(x) = \mathrm{e}^{kx}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k.

1. Que peut-on dire de la fonction f_0 ? Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_0$.
2. Quelle est la fonction f_1 ?
3. Prouver que les courbes $\mathscr{C}_k$ ont un point commun, dont on précisera les coordonnées.
4. Déterminer le nombre réel k tel que la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par le point $A(1;\mathrm{e}^2)$.
5. Déterminer le nombre réel k tel que la courbe $\mathscr{C}_k$ passe par le point $B(1;\mathrm{e}^{-1})$.
6. Tracer à la calculatrice les représentations graphiques des fonctions trouvées dans les deux questions précédentes.

Exercice fil rouge 4 Opérations algébriques

1. $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$; **2.** $(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$; **3.** $(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2 - \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^{-x})$.

Dérivation et variations

Exercice fil rouge 5 Calculs de dérivées

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes.
1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^x + x^2 + x$; **2.** $f_2 : x \mapsto 5\mathrm{e}^x + 5x\mathrm{e}^x$.

3.7 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + x$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe (Oy).
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
3. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$. Vérifier les variations à l'aide de la calculatrice.

Exercice fil rouge 6 Calculs de dérivées

1. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; **2.** $f_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.

3.8 Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x\mathrm{e}^x$. On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.
3. En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbf{R}$. Vérifier les variations à l'aide de la calculatrice.
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Exercice fil rouge 7 Calculs de dérivées

1. $f_5 : x \mapsto x^3\mathrm{e}^{-x}$; **2.** $f_6 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

3.9 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}}{2}(x^2-1)$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et g avec l'axe des ordonnées.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et g avec l'axe des abscisses.
3. Montrer que les représentations graphiques de f et de g ont un point commun d'abscisse 1.
4. Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$.
5. Démontrer que les représentations graphiques de f et de g admettent une tangente commune au point d'abscisse 1.
6. Déterminer une équation de cette tangente.

Exercice fil rouge 8 Calculs de dérivées

1. $f_7 : x \mapsto \mathrm{e}^{4x+1}$; **2.** $f_8 : x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{-x+1}$.

3.10 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -0,2(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$.
f admet-elle un extremum sur $\mathbf{R}$?

Études de positions relatives et inéquations

3.11 On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = x$. L'objectif de cet exercice est d'étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$.

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
2. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
3. En déduire le signe de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
4. Déterminer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$.

3.12 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$ et $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$. On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs représentations graphiques respectives dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont un unique point commun, dont on précisera les coordonnées.
2. Les tangentes aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leur point commun sont-elles confondues ?
3. Factoriser la différence $d(x) = g(x) - f(x)$ puis étudier son signe sur $\mathbf{R}$.
4. En déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3.13 Le but de cet exercice est de démontrer que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e} \times x - 1$.

1. Étudier les variations de la fonction ϕ définie par $\phi : x \mapsto \mathrm{e}^x - \mathrm{e} \times x + 1$.
2. Conclure.

Fonctions quotients

Exercice fil rouge 9 Calculs de dérivées

1. $f_9 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$; 2. $f_{10} : x \mapsto \dfrac{3x + 1 - \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$.

3.14 Soit f la fonction définie pour tout réel x non nul par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x non nul.
2. Étudier, à l'aide d'un tableau, le signe de $f'(x)$ sur $\mathbf{R}^\star$. En déduire le tableau de variations de f.

3.15 Pour tout entier naturel non nul n, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbf{R}$ par $g_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^n}$.

1. Donner l'expression de la fonction g_1 puis étudier ses variations.
2. Donner l'expression de la fonction g_2 puis étudier ses variations.
3. A l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, conjecturer les variations de la fonction g_n pour $n > 2$.

3.16 On souhaite étudier la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. On notera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. En étudiant le signe de la fonction $g : x \mapsto e^{2x} + 1$, déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.
3. En déduire les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x = 0$.
5. On souhaite dans cette question encadrer la solution de l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ à l'aide d'un algorithme.
   - **a.** Démontrer que résoudre $f(x) = \dfrac{1}{2}$ revient à résoudre $e^{2x} = 3$.
   - **b.** Vérifier à l'aide de la calculatrice ou d'un tableur que la solution de l'équation $e^{2x} = 3$ est comprise entre 0 et 1.
   - **a.** Faire fonctionner l'algorithme ci-contre pour la valeur $k = 2$.
   - **b.** En déduire un encadrement de la solution d'amplitude strictement inférieure à 10^{-2}.

Initialisation :	Saisir k, entier naturel
	a prend la valeur 0
	b prend la valeur 1
Traitement :	Tant que $b - a \geqslant 10^{-k}$ faire :
	m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
	Si $e^{2m} < 3$ alors
	a prend la valeur m
	Sinon
	b prend la valeur m
	Fin Si
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher a et b

Sujet du baccalauréat

3.17 *Antilles-Guyane, juin 2014*

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{e^x}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

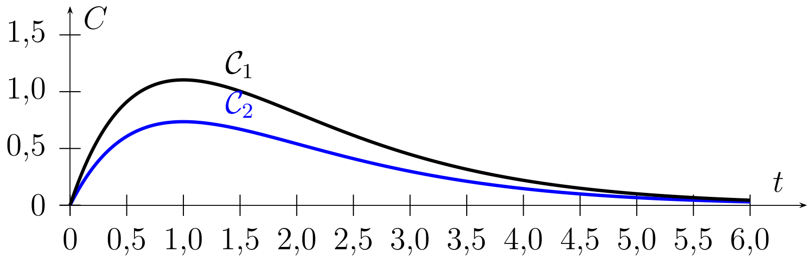
1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbf{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$. Dresser, en le justifiant, le tableau de variations de la fonction g sur $\mathbf{R}$. En déduire le signe de $g(x)$.
2. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbf{R}$. Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
3. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
4. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

3.18 *Polynésie, juin 2016*

Partie A

Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.
C est exprimée en gramme par litre et t en heure.
Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$. À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2. Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeûn absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$ où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

b. « À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. » Est-ce vrai ?

Partie B – Un cas particulier

Paul boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.
On admet qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.
On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Exécuter cet algorithme sur deux tours de boucles en arrondissant les valeurs à 10^{-2} près. On pourra, pour répondre, remplir un tableau donnant les valeurs successives de p, t et C.
Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$
	p prend la valeur $0,25$
	C prend la valeur $0,21$
Traitement :	Tant que $C > 5\times10^{-3}$ faire :
	t prend la valeur $t + p$
	C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher t

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?