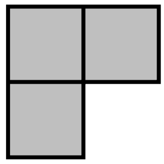
Thème 2
La démonstration par récurrence

Vérification des acquis

☐ Savoir mener un raisonnement par récurrence.

2.1 Activité 1 – Un pavage de damier



Un *triomino* est la forme constituée de 3 carrés de taille 1×1 représentée ci-contre. *Est-il possible de paver un damier de côté* 2^n *(où* n *est un entier non nul), tronqué d'une case, avec des triominos ?*

Par *paver*, on entend recouvrir le damier avec des triominos, de sorte que toutes les cases du damier soient recouvertes, qu'aucun triomino ne déborde du damier, et qu'aucun triomino n'en chevauche un autre.

1. Le problème est très facile à étudier pour $n = 1$. Expliquer pourquoi.
2. Étudier le problème pour $n = 2$, puis pour $n = 3$.
3. Prouver que, si pour un certain entier k il est possible de paver le damier de côté 2^k tronqué d'une case avec des triominos, alors il est aussi possible de paver le damier de côté 2^{k+1} tronqué d'une case. Pour cela, on pourra découper le damier de côté 2^{k+1} en 4 parties.
4. Conclure.

2.2 Activité 2 – Étude d'une suite définie par une relation de récurrence

Dans cet exercice on s'intéresse au comportement d'une suite u définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 - 1$, en fonction de la valeur de son premier terme u_0. Pour cette étude, on va utiliser un algorithme permettant de calculer les termes de cette suite.

Partie A – Observation et modifications de l'algorithme

Initialisation :	Saisir u_0, un réel
	u prend la valeur u_0
	Afficher u
Traitement :	Pour i allant de 1 à 5,
	u prend la valeur $u^2 + 1$
	afficher u
	Fin Pour

1. **a.** Calculer les 6 premiers termes de la suite quand $u_0 = 2$ à partir de la formule.
   b. Appliquer l'algorithme quand $u_0 = 2$.
   c. L'algorithme semble-t-il bien calculer les termes de la suite ?
2. Quelle modification faudrait-il apporter à l'algorithme pour étudier la suite telle que $u_{n+1} = u_n^2 - 1$?
3. Quelle modification faudrait-il apporter à l'algorithme pour afficher 10 termes ?
4. Réécrire l'algorithme de sorte qu'il calcule et affiche un nombre de termes défini par l'utilisateur.

Partie B – Implémentation de l'algorithme

Pour implémenter effectivement l'algorithme, nous allons utiliser le logiciel libre Algobox. On travaillera pour cela sur la dernière version de l'algorithme, où le nombre de termes calculés est défini par l'utilisateur.

1. Déclarer les variables qui seront utilisées dans l'algorithme : u_0 le premier terme, u qui représentera le terme courant de la suite, n le nombre de termes à calculer et i le compteur pour la boucle Pour. Se placer ensuite sur la ligne DEBUT ALGORITHME.

A noter : Dans la suite, il faudra créer une nouvelle ligne pour chaque nouvelle instruction.

2. Écrire les instructions d'initialisation de l'algorithme, c'est à dire la lecture des valeurs de u_0 et n et l'affectation de la valeur u_0 à la variable u.
3. Faire afficher la valeur courante de u, avec un retour à la ligne.
4. Mettre en place la boucle Pour :
   a. Indiquer la variable compteur, sa valeur initiale et sa valeur d'arrêt.
   b. Affecter la valeur $u * u - 1$ à la variable u.
   c. Faire afficher la valeur courante de u, avec un retour à la ligne.
5. Tester l'algorithme. On pourra choisir le mode pas à pas pour suivre les étapes et repérer les éventuelles erreurs.
6. Pour mieux visualiser les termes dans la partie suivante, ajouter des instructions du menu "Dessiner dans un repère", aux endroits opportuns dans le programme. On prendra garde à définir une fenêtre d'affichage adaptée au problème.

Partie C – Étude expérimentale de plusieurs cas

1. Expliquer pourquoi il est inutile d'étudier les cas où $u_0 < 0$.
2. Considérons le cas $u_0 = 2$.
   a. Faire calculer 5 valeurs. Retrouve-t-on bien les valeurs trouvées dans la première partie ?
   b. Faire calculer 20 valeurs. Que se passe-t-il ?
   c. Quel semble être le comportement de cette suite lorsque n tend vers l'infini ?
3. Qu'observe-t-on quand $u_0 = 0$? Trouver une autre valeur de u_0 pour laquelle on retrouve le même type de comportement.
4. Considérons le cas $u_0 = 0.5$.
   a. Faire calculer 5 valeurs. Un comportement spécifique se dégage-t-il de ces premières valeurs ?
   b. Faire calculer 50 valeurs. Qu'observe-t-on ?
   c. Quel semble être le comportement asymptotique de cette suite ?
5. Répondre aux mêmes questions dans les cas $u_0 = 1.7$, $u_0 = 1.2$ et $u_0 = 0.9$,
6. On observe en fait deux types de comportement, en fonction de la valeur de u_0. Par tâtonnement, déterminer un encadrement à 10^{-3} de la valeur de u_0 où s'opère le changement de comportement.

Partie D – Éléments théoriques

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x) = x^2 - x - 1$.

1. Déterminer la solution positive, notée φ, de l'équation $f(x) = 0$. On en donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-4}.
2. Prouver, par récurrence, que si $u_0 > \varphi$ alors, pour tout entier naturel n, $u_n > \varphi$.

On peut démontrer que φ, le Nombre d'Or, est bien la valeur charnière pour le comportement asymptotique de cette suite.

Démontrer une égalité par récurrence

2.3 Une suite *arithmétique* est une suite définie par son premier terme, habituellement noté u_0, et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + r$, où r est un nombre réel appelé *raison* de la suite.

1. On s'intéresse à la suite arithmétique u de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5.
   - **a.** Donner la relation de récurrence définissant la suite u.
   - **b.** Donner les 5 premiers termes de la suite u.
   - **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3 + 5n$.
2. On s'intéresse à une suite arithmétique u de premier terme u_0 et de raison r.
   - **a.** Donner la relation de récurrence définissant la suite u.
   - **b.** Exprimer en fonction de u_0 et r les 5 premiers termes de la suite u.
   - **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Exercice fil rouge 1

Sachant que pour tous réels x et y, $e^{x+y} = e^x e^y$, prouver par récurrence que pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, $e^{nx} = (e^x)^n$.

2.4 Une suite *géométrique* est une suite définie par son premier terme, habituellement noté v_0, et une relation de récurrence de la forme $v_{n+1} = v_n \times q$, où q est un nombre réel appelé *raison* de la suite.

1. On s'intéresse à la suite géométrique v de premier terme $v_0 = 10$ et de raison 3.
   - **a.** Donner la relation de récurrence définissant la suite v.
   - **b.** Donner les 5 premiers termes de la suite v.
   - **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel v, $v_n = 10 \times 3^n$.
2. On s'intéresse à une suite géométrique v de premier terme v_0 et de raison q.
   - **a.** Donner la relation de récurrence définissant la suite v.
   - **b.** Exprimer en fonction de v_0 et q les 5 premiers termes de la suite v.
   - **c.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $v_n = v_0 \times q^n$.

Exercice fil rouge 2

Prouver par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, la dérivée de la fonction $g_n : x \mapsto x^n$ est la fonction ${g_n}' : x \mapsto nx^{n-1}$.

2.5 On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Donner la valeur des 5 premiers termes de la suite.
2. Étudier les variations de la suite u.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Exercice fil rouge 3

Soit k un entier naturel. Prouver par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto e^{kx}$ est la fonction $x \mapsto k^n e^{kx}$.

2.6 Soit w la suite définie par $w_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = \dfrac{5w_n + 3}{w_n + 3}$.

1. Donner les 3 premiers termes de la suite w et émettre une conjecture concernant cette suite.
2. Prouver cette conjecture par récurrence.

Démontrer une inégalité par récurrence

Exercice fil rouge 4 Inégalité de Bernoulli

Prouver par récurrence que pour tout réel $a \geqslant 0$ et tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1+na$. Interpréter ce résultat à l'aide d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.

2.7 Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$.

1. L'algorithme ci-dessous a pour objectif de calculer les N premiers termes de la suite.

Initialisation :	Saisir N, un entier naturel non nul.
	u prend la valeur 1.
	Afficher u.
Traitement :	Pour i allant de 1 à $N-1$,
	u prend la valeur ... ;
	Afficher u ;
	Fin pour.

   a. Compléter cet algorithme.
   b. Appliquer l'algorithme avec l'entrée $N = 3$, en donnant des valeurs approchées à 10^{-3}.
   c. Comment faudrait-il modifier l'algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite jusqu'à ce que ces termes dépassent $1,617$? (On admet que la suite est croissante et qu'elle dépassera bien $1,617$ à partir d'un certain rang.)

2. Représenter les premiers termes de cette suite à l'aide de la calculatrice.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

Exercice fil rouge 5

Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, $2^n \geqslant n+1$.

2.8 On s'intéresse à la suite u définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1. Donner les 5 premiers termes de la suite u.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.
3. En étudiant le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ pour tout entier naturel n, déterminer les variations de la suite u.

Exercice fil rouge 6

Prouver par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, $n^2 - n \geqslant 3$.

Démontrer une formule de somme par récurrence

2.9

1. En utilisant une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison, justifier que la somme des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontrer à nouveau ce résultat, par récurrence.

2.10

1. Calculer la somme des deux premiers entiers naturels impairs, puis des trois premiers, puis des quatre premiers.
2. Conjecturer une formule pour la somme des n premiers entiers naturels impairs.
3. Démontrer cette formule par récurrence.

Exercice fil rouge 7

Démontrer que la somme des carrés des n premiers entiers naturels est égale à $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Sujets du baccalauréat

2.11 *La Réunion, juin 2008*

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{n}.$$

1. **a.** Calculer u_1.

b. Les valeurs de u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11} sont respectivement égales à : 45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$. Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

2.12 *Centres étrangers, juin 2011*

On considère une droite $\mathcal{D}$ munie d'un repère $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath})$.
Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathcal{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point O ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1. **a.** Placer sur un dessin la droite $\mathcal{D}$, les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6. On prendra 10 cm comme unité graphique.

b. Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n.
Calculer a_2, a_3, a_4 a_5 et a_6.

c. Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

2. Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\dfrac{1}{2}a_n + 1$.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = a_n - \dfrac{2}{3}$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

4. Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (a_n).

2.13 *Antilles-Guyane, Septembre 2010*

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n$.

a. Calculer v_0.

b. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c. En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d. Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n, $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a. Calculer w_0.

b. En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

c. En déduire que pour tout n de $\mathbf{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d. Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbf{N}$, $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

2.14 *Polynésie, Juin 2016*

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1. Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2. Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

Exercices complémentaires

2.15 **Activité 3 – De l'importance de bien initialiser**
On considère une suite u telle que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Démontrer que si $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, alors $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
2. Démontrer que si $u_n \leqslant 0$, alors $u_{n+1} \leqslant 0$.
3. Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire des termes de la suite u ?
   $u_0 = 0,5$; $u_0 = -1$; $u_0 = 2$.

2.16 **Activité 4 – Toutes les droites sont parallèles ?**
Le mathématicien Hongrois George Pólya présenta un jour à ses étudiants le raisonnement suivant, qui prouve que toutes les droites sont parallèles.

1. **Initialisation :** Une seule droite est évidemment parallèle à elle-même.
2. **Hérédité :** Supposons que tout ensemble de k droites est constitué de droites parallèles. Considérons un ensemble de $k+1$ droites, et numérotons-les D_1, D_2, D_3,..., D_k, D_{k+1}. Par hypothèse de récurrence, les k droites D_1, D_2, D_3, ..., D_k sont parallèles. De même, toujours par hypothèse de récurrence, les k droites D_2, D_3, ..., D_{k+1} sont parallèles. Or la droite D_2 fait partie des deux ensembles. Les droites D_1, D_2, D_3,..., D_k, D_{k+1} sont donc toutes parallèles : la propriété est vraie au rang $k+1$.
3. **Conclusion :** On a prouvé que la propriété est vraie pour une droite, et que si elle est vraie pour k droites rang elle est vraie $k+1$ droites. Elle est donc vraie pour tout ensemble de droites : toute les droites qui existent sont donc parallèles.

Trouver l'erreur dans ce raisonnement.

2.17 La célèbre suite de Fibonacci est définie par $f_0 = 1$, $f_1 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$.

1. Donner les 5 premiers termes de la suite de Fibonacci.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $2n - 1 \geqslant n + 1$.
   b. Démontrer par une récurrence double que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $f_n \geqslant n$.
   c. Démontrer que la propriété précédente est vraie pour tout entier naturel n.
3. Déterminer les variations de la suite f.