Terminale S

Thème 17 – Suites majorées, minorées, bornées

Définition 1 : Suites monotones

> *Une suite (u_n) est dite **monotone** si son sens de variation ne change pas.*

Méthode 1 : Pour étudier le sens de variation d'une suite, on étudier le signe de la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$.
Exemple : Soit u une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$. Si r est positif, alors la suite u est strictement croissante. Si r est négatif alors la suite u est strictement décroissante.

Méthode 2 : Dans certains cas, il peut être plus simple de comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.
Exemple : Soit v une suite géométrique de raison q et de premier terme tous deux strictement positifs. Alors pour tout entier naturel n, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = q$. Si $q > 1$, alors la suite v est strictement croissante. De manière analogue, si $q < 1$ la suite v est strictement décroissante.

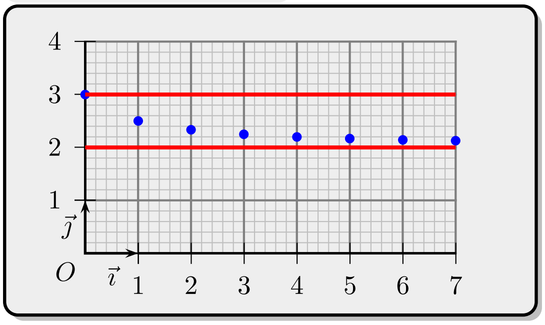
Définition 2 : Suites majorées et minorées

> *Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe un nombre M tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant M$.*
> *Le nombre M est un **majorant** de la suite (u_n).*
> *Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe un nombre m tel que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant m$.*
> *Le nombre m est un **minorant** de la suite (u_n).*

Exemple : Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2 + \frac{1}{n+1}$.

La suite (v_n) est minorée par 2 et majorée par 3. En effet, pour tout entier naturel n, $n + 1 > 1$ donc $0 < \frac{1}{n+1} < 1$ et ainsi $2 < v_n < 3$.
On peut observer ces propriétés sur la représentation graphique de la suite.

Illustration : La suite (v_n)



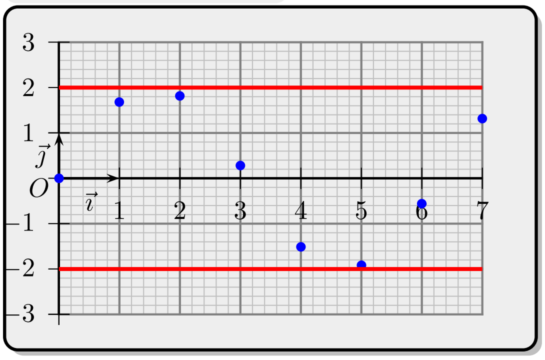
Définition 3 : Suites bornées

> *Une suite (u_n) est dite **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples :

- La suite (v_n) définie par $v_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ est majorée par 3 et minorée par 2. Elle est donc bornée.
- La suite (w_n) définie par $w_n = n^2 - 3$ n'est pas bornée car elle n'est pas majorée.
- La suite définie par $t_n = 2 \sin n$ est bornée. En effet, pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$ et donc $-2 \leqslant t_n \leqslant 2$.

Illustration : La suite (t_n)



Définition 4 : Rappel : Limite finie

> *Une suite **converge vers une limite** ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.*

Définition 5 : Rappel : Limite infinie

> *On dit qu'une suite (divergente) **tend vers l'infini (positif)** si, quel que soit le réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à A.*

Théorème 1 : Suites croissantes non majorées

> *Toute suite croissante non majorée tend vers l'infini (positif).*
> *De même, toute suite décroissante non minorée tend vers l'infini négatif.*

Démonstration : Soit (u_n) une suite croissante et non majorée et A un nombre quelconque.
Puisque la suite n'est pas majorée, il existe un entier naturel p tel que $u_p > A$.
Mais puisque la suite (u_n) est croissante, alors pour tout $n > p$, $u_n \geqslant u_p > A$.
Ainsi, à partir du rang p, tous les termes u_n sont strictement supérieurs à A.
Cette propriété étant vraie pour tout nombre réel A, on peut en conclure que la suite (u_n) tend vers $+\infty$. □

Exemple : La suite (w_n) définie par $w_n = n^2 - 3$ est croissante (comme la fonction carrée) et non majorée. Par conséquent, elle tend vers l'infini.
En effet, quel que soit le nombre réel A, pour tout n strictement supérieur à $\sqrt{A+3}$, w_n est strictement supérieur à A.

Théorème 2 : Suites croissantes majorées

> *Toute suite réelle croissante majorée est convergente.*
> *Toute suite réelle décroissante minorée est convergente.*

Exemple : La suite (v_n) définie par $v_n = 2 + \frac{1}{n+1}$ est décroissante (comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$) et minorée par 2. D'après le théorème, elle est donc convergente. Il s'avère que sa limite est 2.

Méthode : Déterminer la limite d'une suite convergente

Méthode 1 : Si la formule de la suite est de la forme $u_n = f(n)$, étudier la limite directement.
Méthode 2 : Si la formule de la suite est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, résoudre l'équation $\ell = f(\ell)$.

Exemples :

- La suite (v_n) est définie par $v_n = 2 + \frac{1}{n+1}$. Le terme $n+1$ tend clairement vers $+\infty$, donc $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0. Par conséquent, la limite de la suite (v_n) est 2.
- Considérons la suite (z_n) définie par $z_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \sqrt{2z_n - 1}$. On admet que cette suite est convergente vers une limite finie ℓ. Cette limite est alors solution de l'équation

$$\begin{aligned} \ell &= \sqrt{2\ell - 1} \\ \ell^2 &= 2\ell - 1 \\ \ell^2 - 2\ell + 1 &= 0 \\ (\ell - 1)^2 &= 0 \\ \ell - 1 &= 0 \end{aligned}$$

La limite de la suite (z_n) est donc 1.

Illustration : La suite (z_n)