Thème 15
Limites de fonctions

Vérification des acquis

- ☐ Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions.
- ☐ Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement.
- ☐ Interpréter graphiquement des limites.

15.1 Activité 1 – Croissances comparées de x et $\ln x$

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0;+\infty[$, positive sur $[1;+\infty[$, et vérifie les propriétés suivantes :

- $\ln 1 = 0$.
- Pour tous réels strictement positifs x et y, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- Pour tout réel strictement positif x, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

1. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0;+\infty[$.
2. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Exercice fil rouge 1

Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son ensemble de définition. En déduire les éventuelles asymptotes.

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^x + x - 1$ sur $]-\infty;+\infty[$;
2. $h : x \mapsto 3x^2 - 5x + 7$ sur $]-\infty;+\infty[$.

15.2 Activité 2 – Sinus et inverse

On rappelle que pour tout réel x, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
   a. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ en utilisant un encadrement.
   b. Quelle(s) asymptote(s) peut-on déduire des limites précédentes ?
   c. Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite éventuelle de f en 0.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}^*$ par $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$.
   a. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de la fonction g.
   b. Quelle(s) asymptote(s) peut-on déduire des limites précédentes ?
   c. Utiliser la calculatrice pour conjecturer la limite éventuelle en 0.

Exercice fil rouge 2

1. $f : x \mapsto x\mathrm{e}^x - 1$ sur $]-\infty;+\infty[$;
2. $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{4x^2+2x-1}{3x-9}$ sur $]3;+\infty[$.

15.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\sqrt{x^2-x+1}$.

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Déterminer la limite de x^2-x+1 en $+\infty$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. De manière analogue, déterminer la limite de f en $-\infty$.

15.4 Dans cet exercice, on s'intéresse à la fonction g, définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.

1. Étudier la limite de g en $-\infty$.
2. Prouver que $g(x) = \dfrac{2-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-x}+1}$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.

Exercice fil rouge 3

1. $f : x \mapsto \dfrac{(\ln x)^2}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$;
2. $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ sur $]-\infty;+\infty[$.

15.5 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \big]-1;+\infty\big[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+2x+18}{x+1}$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Étude des limites.
   a. Déterminer la limite de f en -1.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. Quelle(s) asymptote(s) peut-on déduire de ces limites ?
2. Étude des variations.
   a. Montrer que pour tout x de $]-1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$.
   b. Dresser le tableau de variations complet de f sur $]-1;+\infty[$.
3. Dans un repère, placer les éléments relatifs à $(\mathscr{C})$ obtenus dans les questions précédentes puis tracer à main levée une allure de cette courbe.

Exercice fil rouge 4

1. $f : x \mapsto \ln(x^2+4)$ sur $]-\infty;+\infty[$;
2. $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur $]2;+\infty[$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{5x+3}{-x^2+3x-2}$ sur $]2;+\infty[$.

15.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{x} + 2\mathrm{e}^{-x} + x$.

1. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{x} + 2)(\mathrm{e}^{x} - 1)$.

2. Justifier tous les éléments du tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3. **a.** Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^{2x} + 2 + x\mathrm{e}^{x})$.

b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

Exercice fil rouge 5

1. $f : x \mapsto \dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 7}$ sur $]-\infty ; +\infty[$;

2. $g : x \mapsto x^{2} - 2 + \ln x$ sur $]0 ; +\infty[$.

15.7 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} + x}{\mathrm{e}^{x} - x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. En étudiant les variations de la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^{x} - x$, justifier que la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$.

2. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire les variations de f.

3. Déterminer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

4. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

5. Tracer la tangente en 0, les asymptotes et la courbe $\mathscr{C}_f$ en vous aidant de ces droites.

Exercice fil rouge 6

1. $f : x \mapsto 1 + \ln(1 + x)$ sur $]-1 ; +\infty[$;

2. $g : x \mapsto \ln(2x) + 1 - x$ sur $]0 ; +\infty[$.

15.8 On considère les fonctions f et g définies sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 8\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x) = \mathrm{e}^{x} + 2$.

1. **a.** Étudier les variations de f et de g.

b. Préciser les limites en $+\infty$ de f et g.

2. **a.** Visualiser à la calculatrice les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g.

b. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On pourra pour cela poser $X = \mathrm{e}^{x}$ dans une équation bien choisie.

Exercice fil rouge 7

1. $f : x \mapsto x + 2 - \dfrac{4\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x} + 3}$ sur $]-\infty ; +\infty[$;

2. $g : x \mapsto \ln\left(\dfrac{2 + x}{2 - x}\right)$ sur $]-2 ; 2[$.

15.9

Partie A – Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

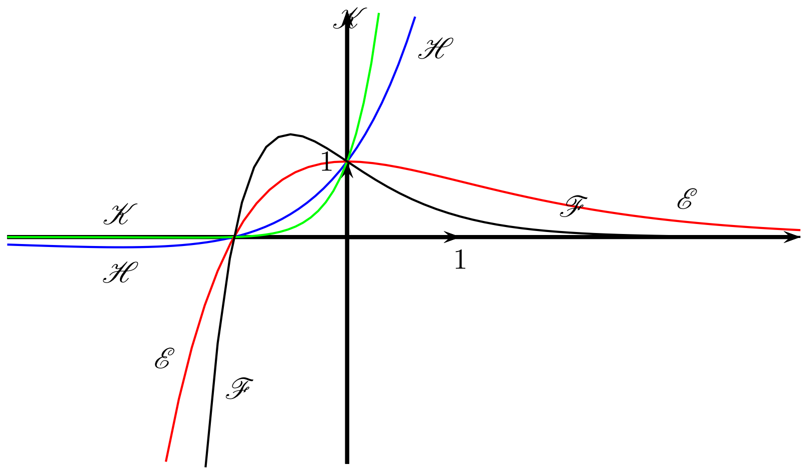
1. Étudier les variations de la fonction f et déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations complet.
2. Tracer la courbe $\mathscr{C}$. On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

Partie B – Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx}$.
On note $\mathscr{C}_k$ la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal.
On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la **Partie A**, puisque $f_{-1} = f$ et $\mathscr{C}_{-1} = \mathscr{C}$.

1. **a.** Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

   b. Déterminer les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_1$. Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à la courbe $\mathscr{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs du réel x, le signe de l'expression $(x+1)(\mathrm{e}^x - 1)$. En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul. En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k. (On distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$.)
4. On a tracé ci-dessous quatre courbes $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{H}$, et $\mathscr{K}$, correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k, parmi les entiers -1, -3, 1 et 2. Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.



Exercice fil rouge 8

1. $f : x \mapsto x - x\ln x$ en $+\infty$;
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ sur $]0; +\infty[$.

15.10 Pour étudier la propagation d'une épidémie, on souhaite modéliser l'évolution du pourcentages de malades par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par

$$f(x)=\frac{12\mathrm{e}^{0,8x}-12}{\mathrm{e}^{0,8x}}$$

où x est le nombre de semaines écoulées depuis le début de l'épidémie.
Selon des critères bien définis, on considère qu'une épidémie est « *maîtrisable* » si le pourcentage de malades ne dépasse pas 15%.
Un chargé d'études affirme que dans le cas de l'épidémie étudiée, malgré le fait que les premiers temps de la propagation soient rapides, il n'y a pas de quoi s'inquiéter, même si on ne trouve pas de vaccin. Qu'en peut-on en penser ?

Sujets du baccalauréat

15.11 *Polynésie, juin 2014*
Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^{x} \quad \text{et} \quad g(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.

2. *Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ*
Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x)=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-x-2$.

- **a.** Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.
- **b.** Justifier que, pour tout réel $x, h(x)=x\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}}-1-\dfrac{2}{x}\right)$.
  En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.
- **c.** On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbf{R}$.
  Pour tout réel x, calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.
- **d.** Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbf{R}$.
- **e.** En déduire que, pour tout réel x, $2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\geqslant x+1$.
- **f.** Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite Δ ?

3. *Étude de la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$*

- **a.** Pour tout réel x, développer l'expression $\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1\right)^2$.
- **b.** Déterminer la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Exercice fil rouge 9

1. $f: x\mapsto \ln x-\frac{1}{\ln x}$ sur $]1;+\infty[$;
2. $g: x\mapsto 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2}-e^{-x}\right)$ sur $]-\infty;+\infty[$.

15.12 *Amérique du Nord, juin 2015*

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x) = \ln(x) + x - 3$.

1. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2. Déduire du tableau de variations que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α (*on demande dans cette question une réponse intuitive).*
   Justifier que α appartient à l'intervalle $[2; 3]$
3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit $\mathcal{C}'$ la courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, $f(x) - \ln(x) = \dfrac{2 - \ln(x)}{x}$.
   En déduire que les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.
2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$H(x) = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

   est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par
   $h(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
   Calculer $I = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{2 - \ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
   Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice fil rouge 10

1. $f : x \mapsto 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$ sur $[0; +\infty[$;
2. $g : x \mapsto x(1 - e^{-x})$ sur $]-\infty; +\infty[$.

$\boxed{\textbf{15.13}}$ *Métropole, juin 2016*

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x - \ln\left(x^2 + 1\right)$$

1. Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation $f(x) = x$.
2. Justifier tous les éléments du tableau de variations ci-dessous à l'exception de la limite de la fonction f en $+\infty$ que l'on admet.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x appartenant à $[0\,;\,1]$, $f(x)$ appartient à $[0\,;\,1]$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables	N et A des entiers naturels ;
Entrée	Saisir la valeur de A
Traitement	N prend la valeur 0 Tant que $N - \ln\left(N^2 + 1\right) < A$ N prend la valeur $N + 1$ Fin tant que
Sortie	Afficher N

   a. Que fait cet algorithme ?
   b. Déterminer la valeur N fournie par l'algorithme lorsque la valeur saisie pour A est 100.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln\left(u_n^2 + 1\right)$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n appartient à $[0\,;\,1]$.
2. Étudier les variations de la suite (u_n).
3. On admet que la suite (u_n) est convergente et on note ℓ sa limite. On admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
   Déterminer la valeur de ℓ.

15.14 *Antilles-Guyane, juin 2014*
On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbf{R}$ par

   $$g(x) = 1 - x + e^x$$

   Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbf{R}$.
   En déduire le signe de $g(x)$.
2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
3. On note f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
   Démontrer que, pour tout réel x,

   $$f'(x) = e^{-x} g(x)$$

4. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbf{R}$.
5. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α comprise entre -1 et 0 sur $\mathbf{R}$ (*on demande dans cette question une réponse intuitive).*
6. **a.** Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

   b. Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$ par

   $$H(x) = (-x - 1)e^{-x}$$

   Démontrer que H est une primitive sur $\mathbf{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.
2. On note $\mathcal{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine $\mathcal{D}$.