Thème 14
Primitives et calculs d'intégrales

Vérification des acquis

- ☐ Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées.
- ☐ Connaître et utiliser les primitives de $u'\mathrm{e}^u$, $u'u^n$ (n entier relatif, différent de -1) et, pour u strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$
- ☐ Calculer une intégrale.
- ☐ Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire.
- ☐ Encadrer une intégrale.
- ☐ Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.

14.1 Dans chacun des cas ci-dessous, indiquer si la fonction F est une primitive de la fonction f ou non. Si non, corriger l'expression de F pour que ce soit le cas.

1. $f(x) = x^2 + e^x$ et $F(x) = 2x + e^x$;
2. $f(x) = \frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}$ et $F(x) = \frac{x}{e^x}$;
3. $f(x) = -\frac{e^x-1}{e^x-x}$ et $F(x) = \ln(e^x - x)$;
4. $f(x) = (\ln x)^2$ et $F(x) = x\left[(\ln x)^2 - 2\ln x + 2\right]$;
5. $f(x) = x^4 \ln x$ et $F(x) = \frac{x^5}{25}(5\ln x - 1)$;
6. $f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$ et $F(x) = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x}$;
7. $f(x) = (1 - x)e^x$ et $F(x) = (2 - x)e^x$;
8. $f(x) = x$ et $F(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x - \frac{1}{x}$.

14.2 Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = x\ln x - x$.

1. La fonction F est une primitive d'une fonction bien connue. Laquelle ?
2. Déterminer d'autres primitives F_1, F_2 et F_3 de la même fonction, vérifiant les conditions suivantes : **a.** $F_1(1) = 0$; **b.** $F_2(2) = 0$; **c.** $F_3(1) = -2$.
3. A l'aide de la calculatrice, représenter les fonctions F, F_1, F_2 et F_3. Qu'observe-t-on ?

14.3 *Primitives de fonctions de la forme $u'e^u$.*

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est de la forme $u'e^u$ en précisant clairement les fonctions u et u', puis en déduire une primitive F de f.
   - **a.** $f(x) = 3e^{3x-1}$;
   - **b.** $f(x) = 2xe^{x^2}$;
   - **c.** $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{1+\sqrt{x}}$;
   - **d.** $f(x) = (\ln x + 1)e^{x\ln x}$.
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.
   - **a.** $f(x) = e^{-4x+7}$;
   - **b.** $f(x) = x^2e^{x^3}$;
   - **c.** $f(x) = \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$;
   - **d.** $f(x) = \frac{1}{2x}e^{1+\ln x}$.

14.4 *Primitives de fonctions de la forme $u'u^{n-1}$.*

1. Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est de la forme $nu'u^{n-1}$, où n est un entier différent de 0, en précisant clairement les fonctions u et u' et la valeur de l'entier n. En déduire une primitive F de f.

   a. $f(x) = 3(x+1)^2$

   b. $f(x) = 6x(x^2+1)^2$;

   c. $f(x) = 2(1+\frac{1}{x})(x+\ln x)$;

   d. $f(x) = -\frac{5}{x^2}(1+\frac{1}{x})^4$.

2. Chacune des fonctions ci-dessous est de la forme $u'u^{n-1}$. Déterminer dans chaque cas une primitive F de f.

   a. $f(x) = (e^x+1)(e^x+x)^2$;

   b. $f(x) = (2x-1)(x^2-x)^4$;

   c. $f(x) = (\frac{2}{x}-1)(2\ln x - x)$;

   d. $f(x) = x(3x^2-4)^4$.

14.5 *Primitives de fonctions de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$.*

1. Rappeler la formule de la dérivée de la fonction $\sqrt{u}$, où u est une fonction définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle de $\mathbf{R}$.
2. Dans chacun des cas suivants, vérifier que la fonction f est de la forme $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ en précisant clairement les fonctions u et u', puis en déduire une primitive F de f.

   a. $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$; **b.** $f(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$; **c.** $f(x) = \frac{3e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x}}}$;

3. Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive F de la fonction f.

   a. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$; **b.** $f(x) = \frac{3x^2+5x+1}{\sqrt{2x^3+5x^2+2x-1}}$; **c.** $f(x) = \frac{e^{-6x}}{\sqrt{e^{-6x}}}$.

14.6 *Primitives de fonctions de la forme $\frac{u}{v}$*

Dans cet exercice, on s'intéresse aux primitives de fonctions de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$.

Partie A – Premier cas

On s'intéresse aux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ et $g(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x-x}$.

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbf{R}$.
2. En étudiant la fonction $d : x \mapsto e^x - x$, justifier que la fonction g est définie sur $\mathbf{R}$.
3. Semble-t-il probable que les primitives des fonctions f et g soient de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$?
4. Quelle est la relation entre le numérateur et le dénominateur de la fonction f ? En déduire une primitive de f sur $\mathbf{R}$. De même pour la fonction g.

Partie B – Deuxième cas

On s'intéresse aux fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ et $k(x) = \dfrac{1-e^x}{(e^x-x)^2}$.

1. On suppose dans cette question qu'une primitive de la fonction h est de la forme $\frac{u(x)}{v(x)}$.

   a. Déterminer alors l'expression de $v(x)$.

   b. Justifier que u doit vérifier la relation $(x^2+1)u'(x) - 2xu(x) = -2x$.

   c. Trouver une fonction simple u vérifiant cette relation.

   d. En déduire une primitive de h sur $\mathbf{R}$.

2. En s'aidant de la démarche de la question 2. trouver une primitive de k sur $\mathbf{R}$.

$\boxed{\textbf{14.7}}$ En sciences physiques, le calcul de primitives permet de déterminer l'équation horaire du mouvement d'un objet, à partir de son accélération.

Partie A – Chute verticale

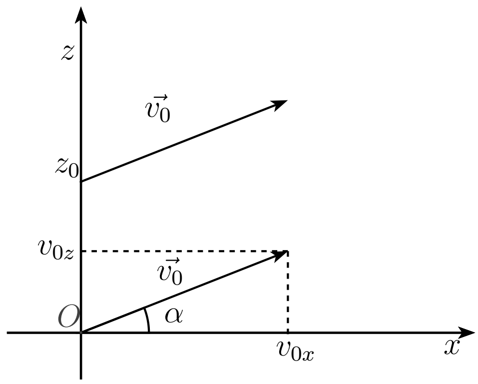
Dans cette partie, on suppose que la chute s'effectue le long d'un axe vertical orienté vers le sol. L'accélération a est alors égale à l'accélération de la pesanteur, g.

1. La vitesse instantanée à l'instant t, $v(t)$, est la primitive de a qui s'annule à l'instant $t = 0$ (temps de départ du mouvement).
Déterminer l'expression de $v(t)$ en fonction de t.

2. La position à l'instant t, $z(t)$, est la primitive de $v(t)$ telle que $z(0) = z_0$, position initiale de l'objet en mouvement. Déterminer l'expression de $z(t)$ en fonction de t.

Partie B – Chute parabolique

Dans cette partie, la chute n'est plus verticale. On inscrit la trajectoire dans un repère du plan (Oxz) et on décompose la trajectoire le long de ces deux axes. On suppose connue la position initiale $(0, z_0)$ et le vecteur vitesse initial $\vec{v_0}(v_{0x}, v_{0z})$, illustré ci-contre.



1. Pour étudier l'équation horaire de la projection sur l'axe $(0x)$, on constate tout d'abord que l'accélération est verticale, donc $a_x = 0$.

a. Déterminer l'expression générale de v_x en fonction de t, en faisant apparaitre une constante.

b. Exprimer v_{0x} en fonction de v_0 et de α et en déduire l'expression de v_x en fonction de t.

c. En déduire l'expression de x en fonction de t, en notant que $x_0 = 0$.

2. Pour l'équation horaire de la projection sur l'axe $(0z)$, on constate tout d'abord que l'accélération est constante et, du fait de l'orientation de l'axe $(0z)$, égale à $a_z = -g$.

a. Déterminer l'expression générale de v_z en fonction de t, en faisant apparaitre une constante.

b. Exprimer v_{0z} en fonction de v_0 et de α et en déduire l'expression de v_z en fonction de t.

c. En déduire l'expression de z en fonction de t en tenant compte de la position intiale z_0.

3. On peut déduire des équations horaires de x et z l'équation de la trajectoire, qui donne z en fonction de x. Pour cela, il suffit d'exprimer t en fonction de x, puis de remplacer t par cette expression dans l'équation horaire de z. Vérifier que l'on obtient alors

$$z = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \times x + z_0.$$

14.8 Activité 1 – Intégrales et Primitives

Le but de cette activité est de faire le lien entre la notion d'intégrale et celle de primitive dans le cas particulier des fonctions affines.

Partie A – Un cas particulier

Dans cette partie, on considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = 2x$.

1. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

2. **a.** Représenter graphiquement puis calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x$.

b. Déterminer une primitive F_1 de la fonction f puis calculer $F_1(3) - F_1(0)$.

c. Déterminer une autre primitive F_2 de la fonction f puis calculer $F_2(3) - F_2(0)$.

d. Le résultat dépend-t-il de la primitive choisie ?

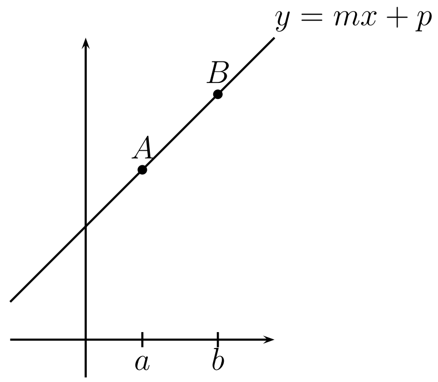
3. **a.** Représenter graphiquement puis calculer la valeur de $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

b. Montrer que, quelle que soit la primitive F de f choisie, la valeur de $F(4) - F(2)$ est toujours égale à $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$.

Partie B – Cas général

On considère une fonction affine g définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $g(x) = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels, ainsi que deux réels a et b, avec $a < b$. On note A et B les points de la courbe de g d'abscisses respectives a et b.

La figure ci-contre correspond au cas où m, $g(a)$ et $g(b)$ sont positifs, mais le raisonnement reste valable dans le cas général.



1. **a.** Exprimer les coordonnées du point A en fonction de a, m et p.

b. Exprimer les coordonnées du point B en fonction de b, m et p.

c. Sur le graphique ci-dessus, représenter graphiquement l'intégrale $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

d. Exprimer l'intégrale $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ en fonction de a, b, m et p.

2. Déterminer une primitive G de la fonction g.

3. Vérifier que $G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exercice fil rouge 1 Calculs d'intégrales

Pour chacune des intégrales suivantes, trouver une primitive de la fonction à intégrer puis calculer l'intégrale.

1. $I_1 = \int_0^1 (x - e^x)\mathrm{d}x$;

2. $I_2 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1}\mathrm{d}x$;

14.9 On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = 1 + e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal, et $\mathscr{D}$ le domaine du plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.
Le but de cet exercice est de partager le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

1. Justifier que la fonction g est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
2. On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine $\mathscr{D}$. Représenter graphiquement la courbe $\mathscr{C}$, le domaine $\mathscr{D}$ et la droite d'équation $x = \frac{1}{3}$.
3. Justifier l'inégalité $\mathscr{A} > 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$ (on pourra utiliser un argument graphique).
4. On note $\mathscr{S}_a$ l'aire du domaine Δ_a compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$ $(0 < a < 1)$. Justifier que $\mathscr{S}_a = 1 + a - e^{-a}$.
5. La droite d'équation $x = \frac{1}{3}$ partage-t-elle le domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire ?
6. Démontrer qu'il existe une unique droite d'équation $x = a_0$ réalisant un partage du domaine $\mathscr{D}$ en deux domaines de même aire par une droite parallèle à l'axe des ordonnées.
7. Déterminer un encadrement du réel a_0 d'amplitude 10^{-2}.

Exercice fil rouge 2 Calculs d'intégrales

1. $I_3 = \displaystyle\int_{-3}^{0} (2x - 3)(x^2 - 3x)^2 \mathrm{d}x$;
2. $I_4 = \displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{5}} e^{5x-1} \mathrm{d}x$;

14.10 Soit t un réel strictement positif. Soit f_t une fonction du second degré définie sur $[0; t]$ telle que $f_t(0) = 0 = f_t(t)$. On souhaite savoir s'il existe une valeur de t telle que f_t soit une fonction densité sur $[0; t]$.

1. Justifier qu'il existe un réel a_t strictement négatif tel que pour tout $x \in [0; t]$, $f_t(x) = a_t x^2 - a_t t x$.
2. Dans cette question, on choisit $a_t = -1$. Déterminer une valeur de t à 0,01 près.

14.11 *Asie, juin 2016*
Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note f_a la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_a(x) = a\mathrm{e}^{ax} + a$.
On note $I(a)$ l'intégrale de la fonction f_a entre 0 et 1 : $I(a) = \displaystyle\int_0^1 f(x) dx$.

1. On pose dans cette question $a = 0$. Déterminer $I(0)$.
2. On pose dans cette question $a = 1$.
   On étudie donc la fonction f_1 définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_1(x) = \mathrm{e}^x + 1$.
   a. Sans étude, représenter graphiquement sur la copie la fonction f_1 dans un repère orthogonal et faire apparaître le nombre $I(1)$.
   b. Calculer la valeur exacte de $I(1)$, puis arrondir au dixième.
3. Existe-il une valeur de a pour laquelle $I(a)$ est égale à 2 ?
   Si oui, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

Exercice fil rouge 3 Calculs d'intégrales

1. $I_5 = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x\,;$

2. $I_6 = \displaystyle\int_0^3 \ln(a)x + (x-a)(x-a)^2\mathrm{d}x\,;$

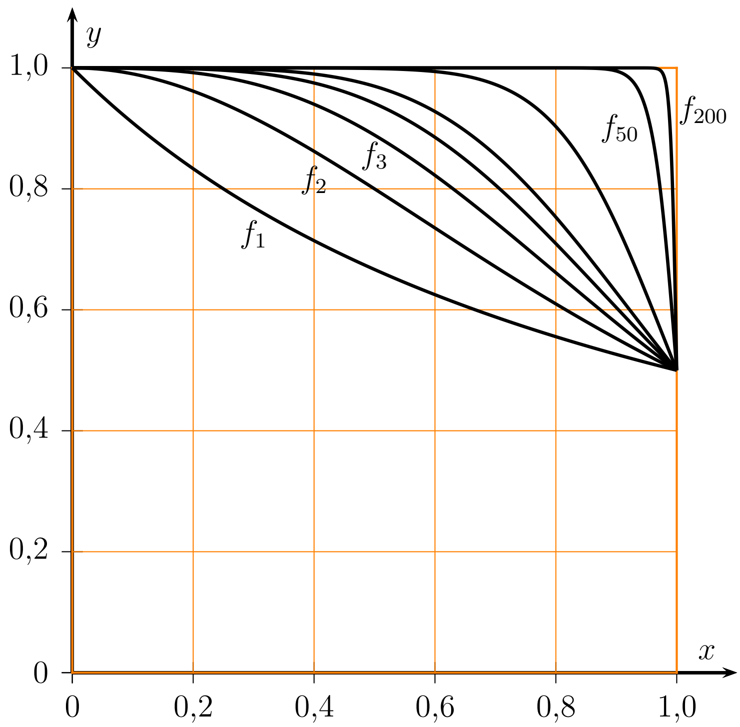
14.12 *Asie, juin 2014*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit le nombre I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-après.



En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1.

3. **a.** Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $I_n \leqslant 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $1 - x^n \leqslant \dfrac{1}{1+x^n}$.

5. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-x^n)\,\mathrm{d}x$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation :	I prend la valeur 0
Traitement :	Demander un entier $n \geqslant 1$ Demander un entier $p \geqslant 1$ Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : $\quad x$ prend la valeur $\dfrac{k}{p}$ $\quad I$ prend la valeur $I + \dfrac{1}{1+x^n} \times \dfrac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I

a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on saisit les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

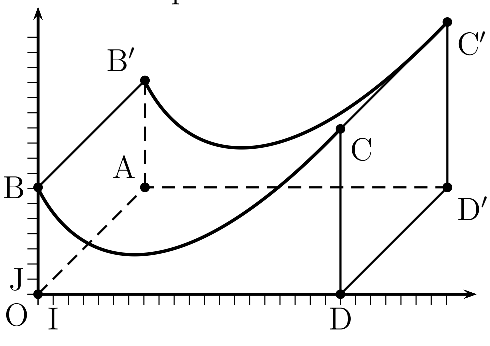
On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme. Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n.

14.13 *Métropole, juin 2015*

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.



Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O ; I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 20]$ par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O ; I, J).

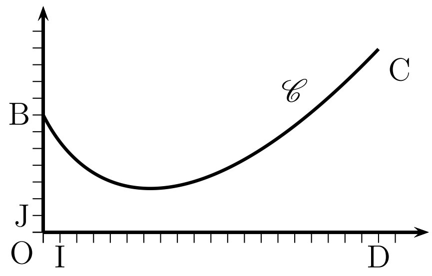
Partie A

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.

2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.



4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

Partie B

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

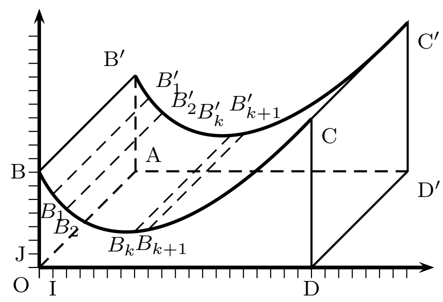
1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3.
On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $\mathrm{B}_k(k\ ;\ f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathscr{C}$ de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B_k$ (voir figure).

a. Montrer que pour tout entier k de 0 à 19, $B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

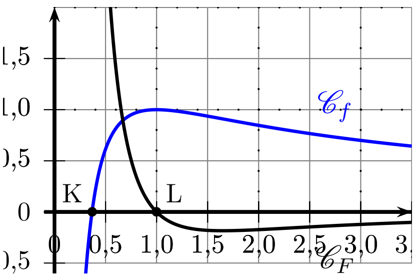
Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de … à … S prend pour valeur …… Fin Pour
Sortie	Afficher …

14.14 *Métropole, septembre 2015*

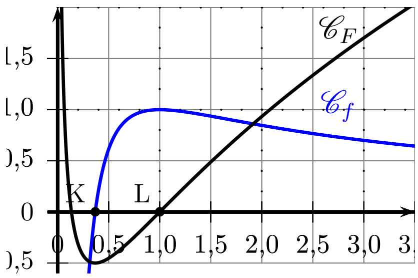
On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}(1+\ln x)$.

1. Dans les trois situations suivantes, on a dessiné, dans un repère orthonormé, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et une courbe $\mathscr{C}_F$. Dans une seule situation, la courbe $\mathscr{C}_F$ est la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f. Laquelle ? Justifier la réponse.

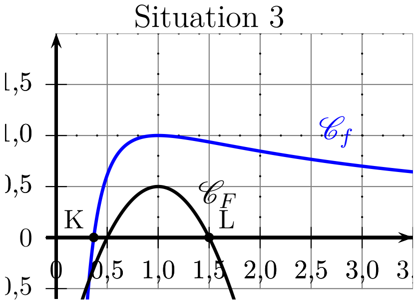
Situation 1



Situation 2



Situation 3



2. Dans la situation retenue à la question 1, on appelle :

- K le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses et $\mathcal{D}$ la droite passant par K et parallèle à l'axe des ordonnées ;
- L le point d'intersection de $\mathscr{C}_F$ et de l'axe des abscisses, ayant une abscisse supérieure à $\dfrac{1}{2}$ et Δ la droite passant par L et parallèle à l'axe des ordonnées.

a. Déterminer une valeur approchée de l'aire du domaine du plan délimité par les droites $\mathcal{D}$ et Δ, par la courbe $\mathscr{C}_f$ et par l'axe des abscisses.

b. Peut-on déterminer la valeur exacte de cette aire ?

Exercice fil rouge 4 Calculs d'intégrales

1. $I_7 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{6x^2-2}{\sqrt{x^3-x+3}}\,\mathrm{d}x$;

2. $I_8 = \displaystyle\int_{-1}^{1} (x^4 - x^3 + x^2 - x)\,\mathrm{d}x$;

14.15 *Liban, mai 2013*

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}.$$

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.
La représentation graphique de la fonction f_1 dans le repère $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $\mathscr{C}_1$.

1. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

2. On appelle f_1' la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbf{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f_1'(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbf{R}$.

3. On définit le nombre $I = \displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x$.
Montrer que $I = \ln\left(\dfrac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ représentant la fonction f_{-1}.
Pour tout réel x, on appelle P le point de $\mathscr{C}_1$ d'abscisse x et M le point de $\mathscr{C}_{-1}$ d'abscisse x.
On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x) + f_{-1}(x) = 1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

3. Tracer les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_{-1}$ dans un même repère.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_{-1}$ l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.
Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geqslant 10$, $f_k\left(\dfrac{1}{2}\right) \geqslant 0,99$.

Exercice fil rouge 5 Calculs d'intégrales

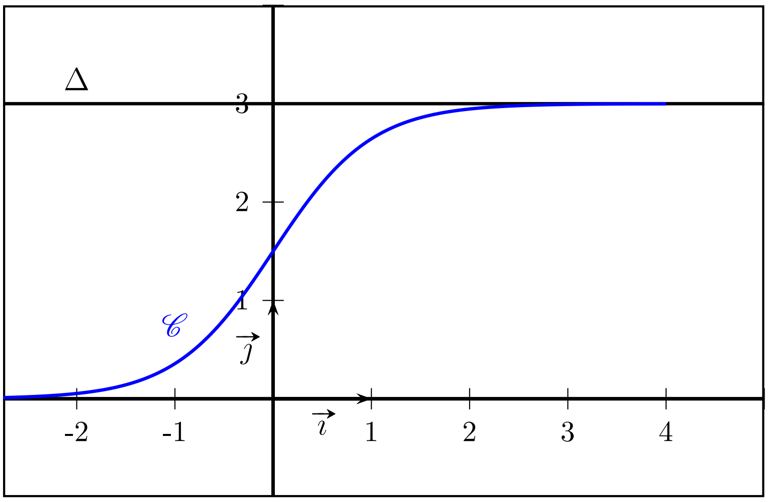
1. $I_9 = \displaystyle\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} + x^4 \mathrm{d}x$;

2. $I_{10} = \displaystyle\int_{-1}^1 x e^{-x^2} \mathrm{d}x$.

14.16 *Pondichéry, avril 2015*

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$.

Sur le graphique ci-après, on a tracé, dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



Soit h la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = 3 - f(x)$.

1. Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbf{R}$.

2. On désigne par H la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $H(x) = -\dfrac{3}{2}\ln\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)$.

Démontrer que H est une primitive de h sur $\mathbf{R}$.

3. Soit a un réel strictement positif.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

b. Démontrer que $\displaystyle\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}^{-2a}}\right)$.

c. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan défini par

$$\left\{\begin{array}{lll} x & \geqslant & 0 \\ f(x) & \leqslant y & \leqslant 3 \end{array}\right.$$

Déterminer l'aire, en unité d'aire, du domaine $\mathcal{D}$.

$\boxed{\textbf{14.17}}$ *Métropole, septembre 2016*

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d'un parachute.

Partie A

Soit v_1 la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$v_1(t) = 5 \times \frac{\mathrm{e}^{0,3t} - 1}{\mathrm{e}^{0,3t} + 1}.$$

1. Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2. On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en m.s^{-1}) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1(t)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas 6 m.s^{-1}.

Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie B

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas.

On admet que, dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en m.s^{-1}), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2(t) = 32,7\left(1 - \mathrm{e}^{-0,3t}\right).$$

1. Quelle est la vitesse, exprimée en m.s^{-1}, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à 0,1 m.s^{-1}.

2. Résoudre l'équation $v_2(t) = 30$ m.s^{-1}. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

3. On sait que la chute du colis dure 20 secondes.

On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$d(T) = \int_0^T v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $[0\,;\,20]$, $d(T) = 109\left(\mathrm{e}^{-0,3T} + 0,3T - 1\right)$.

b. Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4. Déterminer un encadrement d'amplitude $0,1$ s du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.