Thème 14 – Nombres complexes et Géométrie

Dans ce thème, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les nombres complexes constituent un outil particulièrement efficace pour l'étude de problèmes géométriques.

1. Affixe d'un point, d'un vecteur

Définition 1 : Affixe d'un point, point image

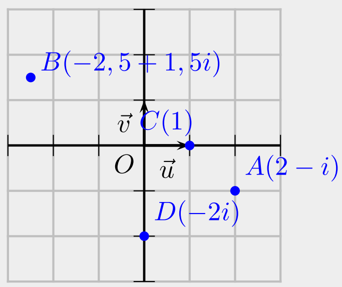
*A tout point M de coordonnées $(x;y)$, on associe le **nombre complexe** $z = x + iy$. Ce nombre complexe est appelé **affixe** du point M et M est le **point image** de z*

.

Définition 2 : Affixe d'un vecteur

*Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a aussi pour coordonnées $(x;y)$. Ainsi, le complexe $z = x+iy$ est aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM}$ est un **vecteur image de z**.*

Illustration : Exemples



Proposition 1 : Somme et différence

Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$. Alors :
- *Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A+z_B}{2}$.*
- *le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.*

Démonstration :

- Le point A d'affixe $z_A = x_A + iy_A$ a pour coordonnées $(x_A; y_A)$. De même B a pour coordonnées $(x_B; y_B)$. Le point I a donc pour coordonnées $(\frac{x_B+x_A}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$, donc pour affixe $z_I = \frac{x_B+x_A}{2} + \mathrm{i}\frac{y_A+y_B}{2}$ qui est bien égal à $\frac{z_A+z_B}{2}$.
- De même, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$. Son affixe est donc bien la différence $z_B - z_A$.

□

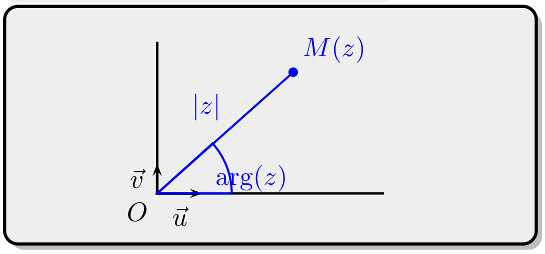
2. Coordonnées polaires, module et argument

2.1. Définitions

Tout point M du plan différent de l'origine peut être repéré par ses coordonnées polaires :

- son rayon polaire est la distance OM ;
- son angle polaire est la mesure en radians de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.

Illustration : Module et argument



Définition 3 : Module, Argument d'un nombre complexe

Dans le plan complexe ;
- *le rayon polaire d'un point M d'affixe z est appelé* ***module*** *de z et noté $|z|$;*
- *une mesure de l'angle polaire d'un point M d'affixe est un* ***argument*** *de z, noté $\arg(z)$.*

Remarque :

- Le nombre complexe 0 a un module égal à 0 et pas d'argument. En effet, l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OO})$ n'existe pas.
- Un nombre complexe non nul a en fait une infinité d'arguments, toutes les mesures de l'angle $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$. En pratique on privilégiera la mesure principale de l'angle, comprise dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

Proposition 2 : Partie réelle, partie imaginaire, module et argument

Considérons un nombre complexe non nul $z = x + iy$. Notons $r = |z|$ son module et $\theta = \arg(z)$ son argument. Alors, on a les formules suivantes.

$$\left\{\begin{array}{rcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\theta & = & \frac{x}{r} \\ \sin\theta & = & \frac{y}{r} \end{array}\right. \quad \textit{et réciproquement} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array}\right.$$

Démonstration : Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le triangle OHM est rectangle en H. Par conséquent, d'après le théorème de Pythagore,

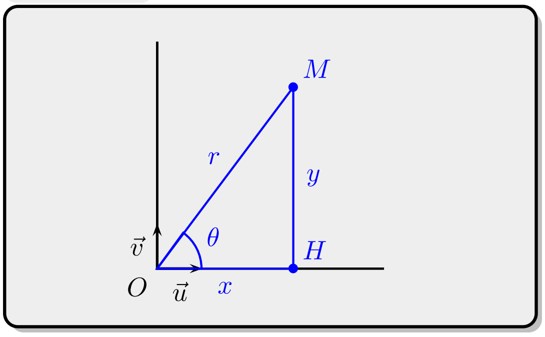
$$r^2 = OM^2 = OH^2 + HM^2 = x^2 + y^2$$

et donc $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Ensuite, d'après les définitions du sinus et du cosinus dans un triangle rectangle,

$$\begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \cos(\widehat{HOM}) = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{x}{r} \\ \sin\theta & = & \sin(\widehat{HOM}) = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{y}{r} \end{array}$$

□

Illustration :



Définition 4 : Forme trigonométrique

Soit z un nombre complexe non nul.On a alors $z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. L'écriture $z = x + iy$ est appellée ***forme algébrique*** *du nombre z. L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est appellée* ***forme trigonométrique*** *du nombre z. Elle est parfois notée $z = [r, \theta]$.*

Exercice résolu 1 : Déterminer forme algébrique

Donner la forme algébrique du nombre complexe z de module 2 et d'argument $\frac{5\pi}{6}$.

Solution : $\begin{cases} x = r\cos\theta = 2\cos(\dfrac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} \\ y = r\sin\theta = 2\sin(5\pi 6) = 1 \end{cases}$ donc $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$

Exercice résolu 2 : Déterminer forme trigonométrique

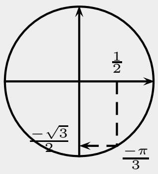
Donner la forme trigonométrique du nombre $z' = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$.

Solution : *Calcul du module :*

$$|z'| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

Calcul d'un argument :

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z'|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z'|} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\}$$



donc $\theta = \dfrac{-\pi}{3}$

Conclusion :

$$z' = [2; -\frac{\pi}{3}]$$

3. Complexe et Géométrie

Théorème 1 : Application à la géométrie

Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A = x_A + iy_A$ et $z_B = x_B + iy_B$.

- *La distance AB est égale au module de la différence des affixes :*

$$AB = |z_B - z_A|$$

- *Une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ est un argument de la différence des affixes :*

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = [2\pi].$$

- *Corollaire hors-programme mais utile : A, B, C et D étant 4 points distincts :*

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA})[2\pi].$$

Démonstration :

- Par définition, $z_B - z_A = (x_B + iy_B) - (x_A + iy_A) = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$. Donc, en utilisant la formule du module, $|z_B - z_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. On retrouve la formule de la distance AB.
- Soit C le point d'affixe z_C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$. Alors $z_C = z_B - z_A$, et par définition de l'argument de z_C, $\arg(z_B - z_A) = \arg(z_C) = (\vec{u}; \overrightarrow{OC}) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})[2\pi]$.
- D'après les propriétés de l'argument et la proposition $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ (voir ci-dessous), on a $\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = \arg(z_A - z_B) - \arg(z_C - z_D) = (\vec{u}; \overrightarrow{BA}) - (\vec{u}; \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{DC}; \vec{u}) + (\vec{u}; \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA})$.

□

Exercice résolu 3 :

Soient A et B deux points d'affixes respectives $z_A = 1 + 2\sqrt{3}\text{i}$ et $z_B = 2 + \sqrt{3}\text{i}$.

1. Calculer la distance AB.
2. Calculer une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$.

Solution :

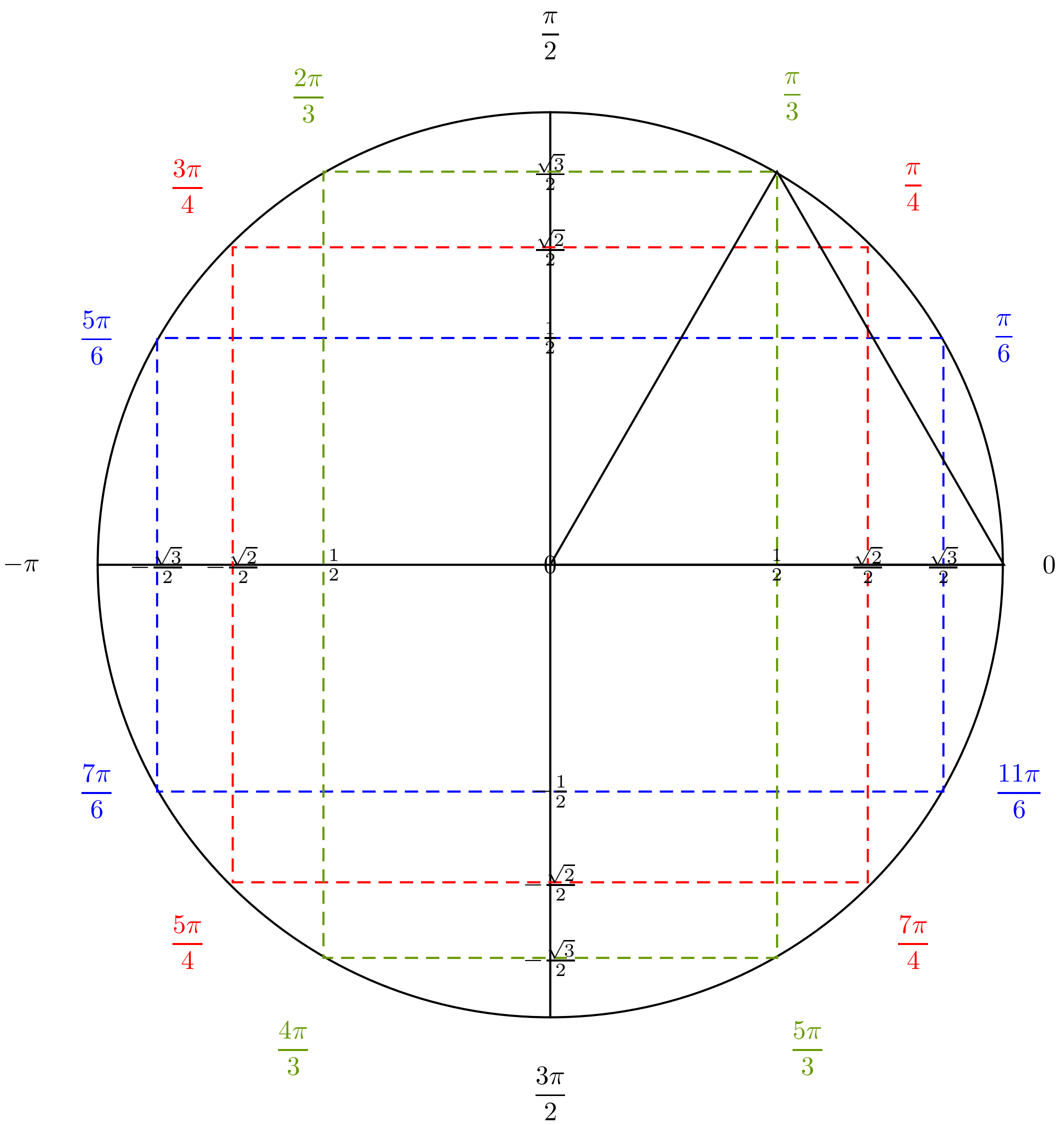
1. La distance AB est égale à

$$AB = |z_B - z_A| = |(2 + \sqrt{3}i) - (1 + 2\sqrt{3}i)| = |1 - \sqrt{3}i| = 2.$$

2. Une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{AB})$ est égale à

$$\arg(z_B - z_A) = \arg(1 - \sqrt{3}i) = -\frac{\pi}{3}[2\pi] \text{ voir calcul de z' dans exo résolu précédent}$$

Les lignes trigonométriques remarquables :



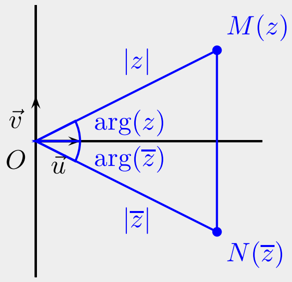
3.1. Propriétés

Proposition 3 : Lien entre module et conjugué

Pour tout nombre complexe z et z', on a :

- $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
- $z\overline{z} = |z|^2$.
- $|zz'| = |z||z'|$ *et* $\arg zz' = \arg z + \arg z'$
- *si* $z' \neq 0$, $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

Illustration :



Démonstration :

- **Démonstration géométrique :** Soit M le point image du complexe z et N le point image du conjugué $\overline{z}$. On sait que N est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses. Par conséquent, $ON = OM$, c'est à dire $|\overline{z}| = |z|$ et $(\vec{u}; \overrightarrow{ON}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$, donc $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
  Démonstration par le calcul : Soit $z = x + \mathrm{i}y$.
  Pour le module : D'une part $|z| = \sqrt{x^{+}y^2}$. D'autre part $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^{+}y^2}$. En conclusion, on a bien $|z| = |\overline{z}|$.
  Pour l'argument : $\cos(\theta_{\overline{z}}) = \frac{x}{|z|} = \cos(\theta_z)$ et $\sin(\theta_{\overline{z}}) = \frac{-y}{|z|} = -\sin(\theta_z)$. Les angles θ_z et $\theta_{\overline{z}}$ ont même cosinus et des sinus opposés. Ils sont dons opposés. Conclusion : $\arg(z) = -\arg(\overline{z})$.
- Posons $z = x + iy$. D'une part $|z|^2 = \sqrt{x^2+y^2}^2 = x^2 + y^2$. D'autre part, $\overline{z} = x - iy$ et donc $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$, donc $z\overline{z} = |z|^2$.
- Les démonstrations de ces propriétés avec les formes algébriques sont très calculatoires. Nous les verrons plus tard avec des outils plus adaptés.

□