Thème 13
Nombres complexes et Géométrie

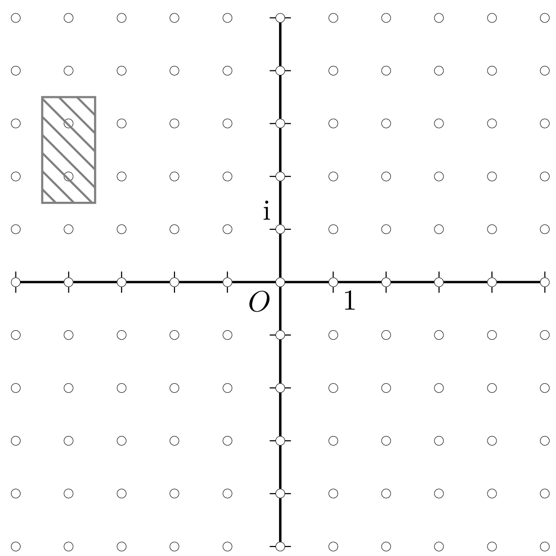
Vérification des acquis

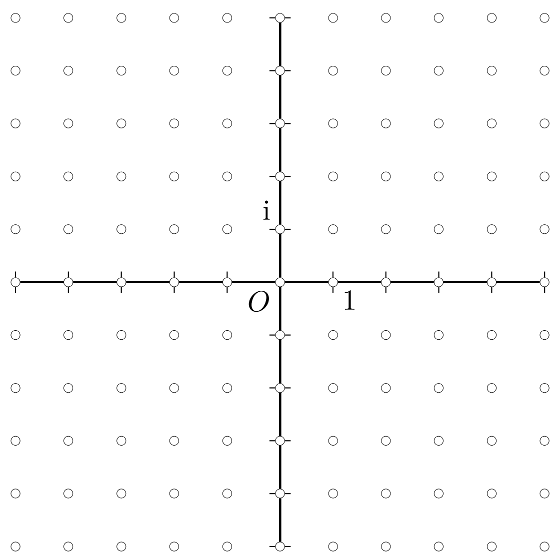
- ☐ Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.
- ☐ Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.
- ☐ Représenter un point à l'aide de son module et de son argument.
- ☐ Savoir passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique d'un nombre complexe, et vice-versa.
- ☐ Savoir interpréter graphiquement un module ou un argument.
- ☐ Savoir calculer une distance ou un angle à partir de l'affixe de points.

13.1 Activité 1 – Bataille navale

Cet exercice est une simple bataille navale, mais les coordonnées des points devront être données sous forme de nombres complexes. Voici le déroulement du jeu, qui se joue à deux.

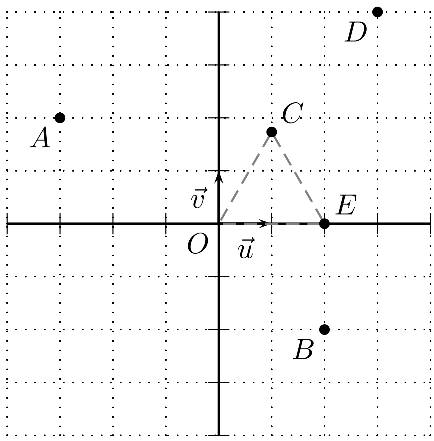
- Dans le repère de gauche, placer vos différents bateaux de taille 3×1, 3×1, 3×2 et 2×1. Attention, les bateaux doivent être posés au-dessus des points, et non des carreaux (voir l'exemple).
- On commence par le joueur le plus jeune, qui annonce l'affixe d'un point. Le joueur adverse lui indique s'il a touché un de ses bateaux en disant éventuellement « touché ». Le repère de droite est utilisé pour noter le résultat des essais successifs.
- Le second joueur annonce à son tour l'affixe d'un point. Si un joueur annonce des coordonnées au lieu de l'affixe, son coup est nul et le joueur adverse ne répond pas.
- Le joueur qui réussit à couler tous les bateaux adverses a gagné.





13.2 **Activité 2 – Coordonnées polaires et forme trigonométrique**

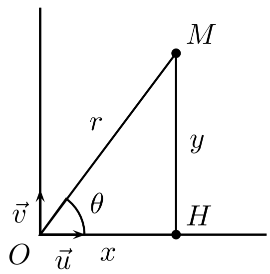
Pour déterminer la position d'un point dans le plan, on peut utiliser un **repère cartésien** et les **coordonnées cartésiennes** du point dans ce repère. On peut aussi donner l'**affixe** du point, qui est une façon d'écrire les coordonnées cartésiennes sous forme de nombre complexe.
Par exemple, on considère le repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ci-dessous, dans lequel on a placé cinq points. Le triangle OCE est équilatéral.



1. Donner les coordonnées cartésiennes, puis les affixes des points A, B, C, D et E. Pour le poins C, on donnera des valeurs approchées lues graphiquement.
2. On voudrait caractériser d'une autre façon la position du point C.
   a. Préciser la distance OC ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC}\right)$.
   b. Ce couple distance-angle permet-il de déterminer sans ambiguïté la position du point C dans le plan ? Argumenter.

Ce couple distance OC / angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OC}\right)$ constitue les **coordonnées polaires** du point C.

3. a. Sur la figure ci-contre, M est un point quelconque d'affixe $z = x + y\text{i}$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note r la distance OM et θ l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Prouver que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.
   b. En déduire que $z = r(\cos(\theta) + \text{i}\sin(\theta))$.



Cette écriture est appelée **forme trigonométrique** de z. C'est en quelque sorte une forme algébrique factorisée.

4. À l'aide des questions précédentes, déterminer la forme trigonométrique, puis la forme algébrique exacte de l'affixe z_C du point C, puis ses coordonnées cartésiennes. Comparer avec les coordonnées trouvées avec les mesures.
5. Soit z_E le nombre complexe tel que $|z_E| = 3$ et $\arg(z_E) = \dfrac{\pi}{4}$. Déterminer la forme algébrique de z_E, puis construire E à la règle et au compas.
6. Soit $z_F = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} - \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\text{i}$ l'affixe du point F. Construire F à la règle et au compas sur la figure précédente.

13.3 Représenter graphiquement les ensembles des points M d'affixe z définis par les équations ou inéquations ci-dessous.

1. $\text{Re}(z) = 3$;
2. $\text{Im}(z) = -2$;
3. $\text{Im}(z) \in \mathbf{Z}$;
4. $\text{Re}(z) \in \mathbf{N}^\star$;
5. $\text{Im}(z) = \text{Re}(z)$;
6. $\text{Im}(z) = -\text{Re}(z)$;
7. $\text{Im}(z) = 2\text{Re}(z)$;
8. $\text{Re}(z) \leqslant 1$;
9. $\text{Im}(z) \geqslant -2$.

Exercice fil rouge 1 Forme algébrique

Déterminer la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

a. $|a| = 2 \quad \arg(a) = \frac{\pi}{3}$ **b.** $|b| = \sqrt{2} \quad \arg(b) = \frac{5\pi}{4}$ **c.** $|c| = 4 \quad \arg(c) = \frac{5\pi}{6}$

13.4 Soit M un point quelconque d'affixe $z = x + y\mathrm{i}$. Dans le plan complexe, placer le point M puis les points images des complexes $\overline{z}$; $-z$; $-\overline{z}$; $z + \overline{z}$; $z - \overline{z}$.

Exercice fil rouge 2 Forme algébrique

a. $|a| = 3 \quad \arg(a) = \frac{5\pi}{3}$ **b.** $|b| = 6 \quad \arg(b) = \frac{-3\pi}{4}$ **c.** $|c| = 1 \quad \arg(c) = \frac{-7\pi}{6}$

13.5 Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives $a = -2+\mathrm{i}$, $b = 2+4\mathrm{i}$, $c = -1-3\mathrm{i}$ et $d = 3$. En calculant les affixes de deux vecteurs bien choisis, prouver que $ABDC$ est un parallélogramme.

13.6 Soient A et B deux points d'affixes $a = 2 + 3\mathrm{i}$ et $b = 5 + 2\mathrm{i}$. Déterminer par le calcul l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un parallélogramme. Vérifier le résultat graphiquement.

Exercice fil rouge 3 Module et argument

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants :

a. $a = 3 + 3\mathrm{i}$ **b.** $b = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$

13.7 **Parties réelles et imaginaires, module et argument**

1. Dans chacun des cas suivants, écrire sous forme algébrique le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ : $\rho = 3$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$; $\rho = 2$ et $\theta = -\frac{\pi}{6}$; $\rho = 1$ et $\theta = \frac{7\pi}{3}$; $\rho = 4$ et $\theta = \frac{3\pi}{4}$.
2. Écrire un algorithme simple avec en entrée le module et l'argument et en sortie les parties réelles et imaginaires, puis implémenter cet algorithme sur votre calculatrice (en mode radian). On appellera le programme ainsi créé EXPOALG.
3. Vérifier, en utilisant le programme EXPOALG, les résultats de la question **1.**.
4. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants : $1 - \mathrm{i}$; $2\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$; $-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$; $-2\mathrm{i}$; -3 ; $-\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$.
5. Ci-contre est reproduit un programme pour calculatrice Texas Instruments.
   a. Que représentent les variables X, Y, M, C et S dans ce programme ?
   b. La fonction $\cos^{-1}$ est la fonction réciproque du cosinus, parfois noté arccos sur les machines. Ainsi, $\cos^{-1} C$ est le plus petit réel positif t tel que $\cos t = C$. Appliquer le programme jusqu'à cette ligne avec le complexe $2\sqrt{3} + 6\mathrm{i}$, en omettant la division par π, puis en faisant cette division. Expliquer l'intérêt de cette opération.
   c. Expliquer l'intérêt de l'instruction conditionnelle, puis l'intérêt de retourner M^2 et non M.
6. Saisir le programme et l'utiliser pour vérifier les résultats de la question **4**.

```
PROGRAM:ALGEXPO
:Prompt X
:Prompt Y
:√(X²+Y²)→M
:X/M→C
:Y/M→S
:(cos⁻¹ C)/π →A
:If S<0
:Then
:-A→A
:End
:Disp "M=√ ",M²
:Disp "A=",A,"π"
```

Exercice fil rouge 4 Module et argument

a. $a = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\mathrm{i}$ **b.** $b = -1,5$

Exercice fil rouge 5 Module et argument

a. $a = 5 - 5\mathrm{i}$ **b.** $b = -\sqrt{6} + \mathrm{i}\sqrt{2}$

13.8 Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, déterminer et représenter dans chaque cas l'ensemble des images des nombres complexes z vérifiant la relation.

1. $|z| = 1$;
2. $|z-3| = 2$;
3. $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$;
4. $|z+2-2\mathrm{i}| = |z-3+\mathrm{i}|$;
5. $\arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$;
6. $\arg(\frac{z-1}{\mathrm{i}}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$;
7. $\arg(\frac{z-1}{z-\mathrm{i}}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$;
8. $\arg(z-2-\mathrm{i}) = 0[\pi]$;

Exercice fil rouge 6 Nature d'un triangle

a, b et c sont les affixes de trois points A, B et C. En utilisant les nombres complexes, déterminer la nature du triangle ABC.

a. $a = 1+4\mathrm{i}$; $b = -2+\mathrm{i}$; $c = 4+\mathrm{i}$. **b.** $a = -4+2\mathrm{i}$; $b = -2+6\mathrm{i}$; $c = 2+4\mathrm{i}$.

13.9 Soit A un point d'affixe a.

1. Décrire géométriquement les points images des complexes $\overline{a}$, $-a$, $\mathrm{Re}(a)$ et $|a|$.
2. Décrire géométriquement les ensembles de points définis par les équations et inéquations ci-dessous :
   - **a.** $|z| = |a|$;
   - **b.** $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a)$;
   - **c.** $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a)$;
   - **d.** $\arg(z) = \arg(a)$;
   - **e.** $|z| < |a|$;
   - **f.** $|a| < |z| < 2|a|$.

Exercice fil rouge 7 Nature d'un triangle

a. $a = -4-6\mathrm{i}$; $b = -2+4\mathrm{i}$; $c = 6-4\mathrm{i}$. **b.** $a = 3+3,5\mathrm{i}$; $b = 5+0,5\mathrm{i}$; $c = 4,5+4,5\mathrm{i}$.

13.10 z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{i}z_1 - z_2 & = & -1 \\ -z_1 + \mathrm{i}z_2 & = & \sqrt{3} \end{array}\right.$.

1. Par quel nombre complexe faudrait-il multiplier la seconde équation pour, par addition, éliminer z_1 ?
2. Déterminer les formes algébriques de z_1 et de z_2.
3. Déterminer le module et un argument de z_1 et de z_2.
4. Calculer le module et un argument de $(z_1 \times z_2)^{2000}$, puis écrire ce nombre complexe sous forme algébrique.

Exercice fil rouge 8 Nature d'un triangle

a. $a = 8$; $b = -4-4\sqrt{3}\mathrm{i}$; $c = -4+4\sqrt{3}\mathrm{i}$. **b.** $a = 4+5\mathrm{i}$; $b = -2+\mathrm{i}$; $c = 2-2\mathrm{i}$.

Sujets de baccalauréat

13.11 *Antilles-Guyane, juin 2016*
On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-2|=1$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est un cercle, dont on précisera le centre et le rayon.
2. Soit a un nombre réel. On appelle $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=ax$.
   Déterminer le nombre de points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ en fonction des valeurs du réel a.

13.12 *Amérique du Nord, juin 2016*
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère le point A d'affixe 4, le point B d'affixe 4i et les points C et D tels que ABCD est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel non nul n, on appelle M_n le point d'affixe $z_n=(1+\mathrm{i})^n$.

1. Écrire le nombre $1+\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique.
2. Montrer qu'il existe un entier naturel n_0, que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré ABCD.

13.13 *Asie, juin 2015*
Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On donne le nombre complexe $\mathrm{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien entre ce nombre et les triangles équilatéraux.

Partie A – Propriétés de j

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2+z+1=0$.
   b. Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   a. $\mathrm{j}^3=1$;
   b. $\mathrm{j}^2=-1-\mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes $1, \mathrm{j}$ et j^2 dans le plan.
   Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B – Triangles équilatéraux

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+\mathrm{j}b+\mathrm{j}^2c=0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question **A-3.b.**, démontrer l'égalité : $a-c=\mathrm{j}(c-b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité $a-b=\mathrm{j}^2(b-c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

13.14 *Polynésie, juin 2015*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$. À tout point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = z^2 + 4z + 3$.

1. Un point M est dit invariant lorsqu'il est confondu avec le point M' associé.
   Démontrer qu'il existe deux points invariants. Donner l'affixe de chacun de ces points sous forme algébrique.
2. Soit A le point d'affixe $\dfrac{-3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et B le point d'affixe $\dfrac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.
   Montrer que OAB est un triangle équilatéral.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y sont réels, tels que le point M' associé soit sur l'axe des réels.
4. Dans le plan complexe, représenter les points A et B ainsi que l'ensemble $\mathcal{E}$.

13.15 *Nouvelle Calédonie, mars 2012*

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbf{C}$ par $P(z) = z^3 - \left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2 + 2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. **a.** Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.
   b. En déduire les solutions dans $\mathbf{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1+\mathrm{i},\quad z_B = 1-\mathrm{i},\quad z_J = \mathrm{i}\sqrt{2}\quad \text{et}\quad z_K = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

1. Placer les points A, B, J, K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.
2. Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.
3. Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

13.16 *Antilles-Guyane, juin 2012*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm.
On complétera cette figure au fur et à mesure des questions.
On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives

$$a = -1+2\mathrm{i}\quad ;\quad b = -2-\mathrm{i}\quad ;\quad c = -3+\mathrm{i}$$

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.
2. Quelle est la nature du triangle OAB ?
3. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z avec $z \neq b$, associe le point M' d'affixe z' définie par
   $$z' = \frac{z+1-2\mathrm{i}}{z+2+\mathrm{i}}$$
   a. Calculer l'affixe c' du point C', image de C par f et placer le point C' sur la figure.
   b. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z avec $z \neq b$, tels que $|z'| = 1$.
   c. Justifier que $\mathcal{E}$ contient les points O et C. Tracer $\mathcal{E}$.

13.17 *Antilles-Guyane, juin 2013*

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et, pour tout entier naturel n, par $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{3}$.

Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = a_n + \mathrm{i}b_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n. Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.
2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1 = \dfrac{1}{3}$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A et B des nombres réels
	K et N des nombres entiers
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1
	Affecter à B la valeur 1
Traitement :	Entrer la valeur de N
	Pour K variant de 1 à N
	Affecter à A la valeur $\dfrac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$
	Affecter à B la valeur $\dfrac{B}{3}$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher A

   a. Exécuter cet algorithme pour $N = 2$. On exposera les valeurs successives des variables dans un tableau.

   b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
   En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n.
2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, puis déterminer la limite de la suite (b_n).
3. **a.** On admet que pour tous nombres complexes z et z', $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$. Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{2|z_n|}{3}$.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

   c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n| \leqslant u_n$. En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

$\boxed{\textbf{13.18}}$ *Baccalauréat blanc, avril 2015*

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère la suite de points (M_n) d'affixes z_n telles que :

$$z_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, \quad z_{n+1} = \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right) z_n$$

1. Démontrer que $z_1 = 2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.

2. Démontrer que le triangle OM_0M_1 est rectangle en M_1.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \arg z_n$.

a. Donner le premier terme u_0 de la suite u.

b. Justifier que u est une suite arithmétique de raison $\dfrac{\pi}{3}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.

4. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = |z_n|$.

a. Donner le premier terme v_0 de la suite v.

b. Justifier que v est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

5. À l'aide des questions précédentes, déterminer la forme algébrique de z_5.

6. Montrer que, pour tout entier naturel n, la distance M_nM_{n+1} est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_n$.

7. On souhaite calculer la longueur de la ligne brisée $M_0M_1 \ldots M_{n+1}$ constituée par les n premiers segments.
Pour cela, on considère la suite (s_n) définie pour tout entier naturel n, par

$$s_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_nM_{n+1}.$$

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $s_n = 8\sqrt{3} \times \left(1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)$.

b. En déduire que (s_n) converge vers $8\sqrt{3}$. Interpréter ce résultat géométriquement.

8. On souhaite, à l'aide de l'algorithme suivant, déterminer à partir de quel rang la longueur de la ligne brisée $M_0M_1 \ldots M_n$ s'approche de sa valeur limite à moins de 10^{-1}.

Variables	N un entier naturel S, W des nombres réels
Entrée	Affecter à W la valeur $4\sqrt{3}$ Affecter à S la valeur W Affecter à N la valeur 0

Traitement	Tant que $\left\lvert \mathrm{S} - 8\sqrt{3}\right\rvert \geqslant 10^{-1}$
	   Affecter à W la valeur $\dfrac{1}{2}\times$W
	   Affecter à S la valeur S+W
	   Affecter à N la valeur N+1
	Fin Tant que

Sortie	Afficher N

a. Préciser le rôle des variables W et S.

b. Déterminer la sortie affichée par cet algorithme.

c. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche le premier rang à partir duquel s s'approche de sa valeur limite à moins de 10^{-k}, où k est un entier naturel non nul saisi par l'utilisateur.