Thème 12 – Plans de l'espace

1. Plans de l'espace – Vecteurs coplanaires

Définition 1 : Plan défini par 3 points non alignés

Soient A, B, C trois points non alignés de l'espace. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe deux réels k et k', éventuellement nuls, tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC}$.

Proposition 1 : Plan défini par un point et deux vecteurs non colinéaires

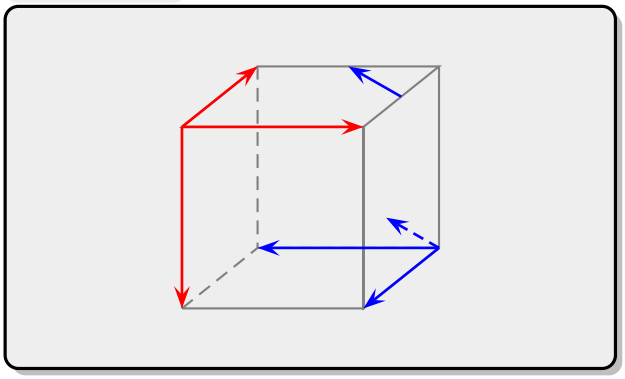
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace et A un point. Il existe deux points de l'espace B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non colinéaires, les points A, B, C ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan de l'espace, noté (ABC) ou $(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 2 : Vecteurs coplanaires

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Il existe 4 points de l'espace A, B, C, D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.
*On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** si les points A, B, C, D le sont.*

Sur la figure ci-contre, les vecteurs bleus sont coplanaires alors que les vecteurs rouges ne sont pas coplanaires.

Illustration :



Proposition 2 : Relation entre vecteurs coplanaires

Soient $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ trois vecteurs de l'espace non tous nuls et non colinéaires.
Par définition, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si et seulement si les points A, B, C et D sont dans un même plan, autrement dit, si et seulement si il existe deux réels β et γ, éventuellement nuls, tels que $\overrightarrow{AD} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$.
Plus généralement, trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non tous nuls et non colinéaires deux à deux sont coplanaires si, et seulement si, il existe deux réels α et β, éventuellement nuls, tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

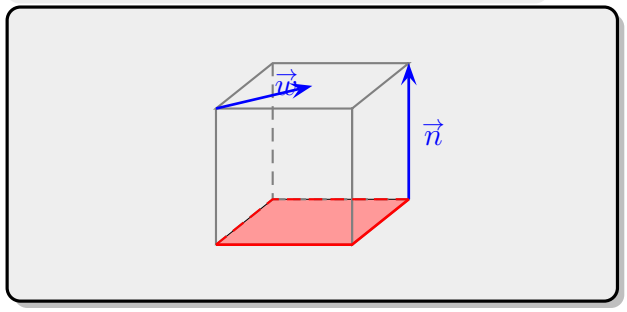
Exemple : Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}17\\22\\27\end{pmatrix}$ sont coplanaires car $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$.

2. Vecteurs normaux et équations cartésiennes

Définition 3 : Vecteur parallèle à un plan

Un vecteur de l'espace $\vec{n}$ est dit ***de direction parallèle à un plan*** *$\mathscr{P}$ s'il est coplanaire à deux vecteurs non colinéaires définissant le plan $\mathscr{P}$.*

Illustration : Vecteur normal à un plan



Définition 4 : Vecteur normal à un plan

Un vecteur de l'espace $\vec{n}$ est dit ***normal à un plan*** *$\mathscr{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur dont la direction est parallèle au plan $\mathscr{P}$.*

Remarques :

- Tout plan de l'espace est caractérisé par un vecteur normal et un point.
- Si $\vec{n}$ est normal au plan $\mathscr{P}$ alors tout vecteur colinéaire à $\vec{n}$ l'est aussi.

Proposition 3 : Prouver qu'un vecteur est normal à un plan

Un vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathscr{P}(A, \vec{u}; \vec{v})$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Démonstration : Soit $\vec{n}$ un vecteur et $\mathscr{P}(A, \vec{u}; \vec{v})$ un plan. Tout d'abord, supposons que $\vec{n}$ soit normal à $\mathscr{P}$. Par définition, il est orthogonal à tout vecteur dont la direction est parallèle au plan $\mathscr{P}$ donc, en particulier, à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
Réciproquement, supposons qu'un vecteur $\vec{n}$ soit orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$. Soit $\vec{w}$ un vecteur dont la direction est parallèle au plan $\mathscr{P}$. Par définition, il est coplanaire aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donc il existe donc deux réels α et β, éventuellement nuls, tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. On constate que $\vec{n} \cdot \vec{w} = \vec{n} \cdot (\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\vec{n} \cdot \vec{u} + \beta\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 + 0 = 0$, ce qui signifie que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$. Ainsi $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur dont la direction est parallèle au plan $\mathscr{P}$ donc est normal à $\mathscr{P}$. □

Proposition 4 : Équation cartésienne d'un plan

Soient $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur non nul et $\mathscr{P}$ un plan.
Tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d = 0$ où d est un réel. Réciproquement, si $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Démonstration : ROC Soient $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ non nul et $A(\alpha, \beta, \gamma)$ un point du plan $\mathscr{P}$.
Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque distinct de A.

$$
\begin{aligned}
M \text{ appartient à } \mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-\alpha \\ y-\beta \\ z-\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0 \\
&\Leftrightarrow ax + by + cz + (-a\alpha - b\beta - c\gamma) = 0 \text{ (en ayant posé } d = -a\alpha - b\beta - c\gamma). \\
&\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0
\end{aligned}
$$

Réciproquement, soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $\vec{n}(a;b;c)$ non nul. L'un des trois réels a, b, c est forcément non nul. Supposons que ce soit a et considérons le point A de coordonnées $(-\frac{d}{a};0;0)$. Ses coordonnées vérifient l'équation $ax+by+cz+d=0$, donc A appartient au plan $\mathscr{P}$. Soient $M(x,y,z)$ un point de $\mathscr{P}$ distinct de A. On a $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=a(x+\frac{d}{a})+by+cz=d+ax+by+cz$. Or, puisque M est dans le plan $\mathscr{P}$, $ax+by+cz=-d$. Par conséquent, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0$. Ainsi, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de direction parallèle au plan $\mathscr{P}$, donc est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. La démonstration est analogue avec b non nul ou c non nul. □

Théorème 1 : Trouver une équation d'un plan

Il existe deux situations classiques :

- *Si on connaît les coordonnées d'un vecteur normal $\vec{n}(a,b,c)$ et d'un point du plan : On sait qu'une équation est de la forme $ax+by+cz+d=0$, où seul d est inconnu. En remplaçant x, y et z par les coordonnées du point, on détermine la valeur de d.* ***Voir exercice résolu 1***
- *Si on connaît les coordonnées de trois points du plan : On sait qu'une équation du plan est de la forme $ax+by+cz+d=0$, où a, b, c et d sont inconnus. En remplaçant x, y et z par les les coordonnées des trois points, on obtient un système de trois équations à quatres inconnues. On exprime les inconnues en fonction d'une seule pour laquelle on choisit une valeur arbitraire non nulle.* ***Voir exercice résolu 2***

Exercice résolu 1 :

Soit $\mathscr{P}$ un plan passant par le point A de coordonnées $(1;2;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}(4;5;6)$. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.

Solution :

Méthode 1 (Basée sur la démonstration) : Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace.

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-2\\z-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=0\\ &\Leftrightarrow 4(x-1)+5(y-2)+6(z-3)=0\\ &\Leftrightarrow 4x+5y+6z-32=0 \end{aligned}$$

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $4x+5y+6z-32=0$.

vérification : En utilisant les coordonnées de A dans l'équation, on a $4x_A+5y_A+6z_A-32=4\times1+2\times5+6\times3-32=32-32=0$. Il n'y a pas d'erreur flagrante.

Méthode 2 (En appliquant la proposition) :

- Une équation du plan est de la forme est de la forme $ax+by+cz+d=0$.
- Puisque $\vec{n}(4;5;6)$ est un vecteur normal, une équation du plan est de la forme $4x+5y+6z+d=0$.
- Puisque $A(1;2;3)$ est un point du plan, on a $4x_A+5y_A+6z_A+d=0$.
- En résolvant cette équation, on conclut que $d=32$.

Une équation du plan $\mathscr{P}$ est $4x+5y+6z-32=0$.

vérification : Avec les coordonnées de A, on a $4x_A+5y_A+6z_A-32=4\times1+2\times5+6\times3-32=32-32=0$. Il n'y a pas d'erreur flagrante.

Exercice résolu 2 :

Soit $\mathscr{P}$ un plan passant par les point A, B et C de coordonnées respectives $(-1;1;1)$, $(-1;2;3)$ et $(1;-2;1)$. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$.

Solution : On vérifie d'abord que les trois points ne sont pas alignés et définissent bien un plan.
Comme $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$ n'ont pas des coordonnées proportionelles, ils ne sont pas colinéaires.
Les points A, B et C ne sont pas alignés et définissent bien un plan.

Une équation du plan (ABC) est de la forme $ax+by+cz+d=0$.

$$A,B,C\in\mathscr{P}\Leftrightarrow\begin{cases}ax_A+by_A+cz_A+d=0\\ax_B+by_B+cz_B+d=0\\ax_C+by_C+cz_C+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a-b+c+d=0\\a-2b-2c+d=0\\a+3b+c+d=0\end{cases}$$

De la première ligne, on déduit que $a=b+c+d$, que l'on reporte dans les deux autres lignes. De cette nouvelle deuxième ligne, on déduit $b=-2c$ que l'on reporte dans la troisième ligne. On obtient finalement

$$\begin{cases}a=b+c+d\\b=-2c\\c=-\frac{1}{2}d\end{cases}$$

En choisissant $d=-2$ et en reportant dans les autres inconnues, on obtient $a=-3$, $b=-2$ et $c=1$.
Une équation du plan est $-3x-2y+z-2=0$.

Vérification : Avec les coordonnées de A, on a $-3x_A-2y_A+z_A-2=-3\times(-1)-2\times1+1-2=0$. De même avec les coordonnées des points B et C.

3. Positions relatives de plans de l'espace

Proposition 5 : Positions relatives de deux plans

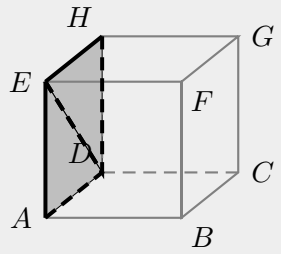
Deux plans de l'espace sont

- *confondus si ils ont au moins 3 points communs non alignés ;*
- *sécants si leur intersection est une droite ;*
- *parallèles si ils n'ont aucun point commun.*

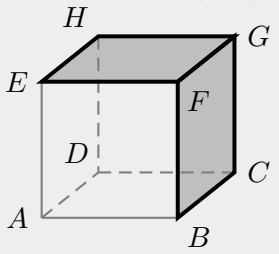
L'intersection de deux plans est donc un plan, une droite ou l'ensemble vide.

Illustration : Dans un cube $ABCDEFGH$

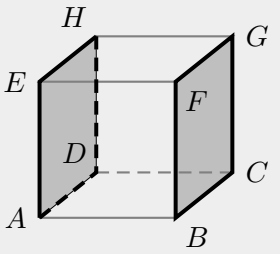
Les plans (HDE) et (ADE) sont confondus.



Les plans (BCF) et (EFH) sont sécants. Leur intersection est la droite (FG).



Les plans (BCF) et (ADE) sont parallèles.



Définition 5 : Plans perpendiculaires

On dit que deux plans sont perpendiculaires quand leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

4. Intersections et équations

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$. Pour déterminer l'intersection de ces deux plans, il faut résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} ax+by+cz+d &= 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' &= 0 \end{cases}$$

- Si les deux équations sont équivalentes, les deux plans sont confondus.
- Si les deux équations sont incompatibles, les deux plans sont parallèles. Leur intersection est donc vide.
- Sinon, l'intersection est une droite. On peut alors choisir arbitrairement une des coordonnées que l'on notera par exemple k. En résolvant alors le système en fonction de k on obtient une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice résolu 3 :

On considère les plans $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$, $\mathscr{P}_3$, $\mathscr{P}_4$ et $\mathscr{P}_5$ d'équation cartésiennes respectives cartésiennes :

- $\mathscr{P}_1 : x+2y+3z+4=0$
- $\mathscr{P}_2 : 2x+4y+6z+8=0$
- $\mathscr{P}_3 : 2x+4y+6z+9=0$
- $\mathscr{P}_4 : -10x+2y+2z+5=0$
- $\mathscr{P}_5 : x+y+z=0$

Déterminer les positions relatives de $\mathscr{P}_1$ avec chacun des autres plans.

Solution :

1. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles (vecteur normaux colinaires) et confondus car leur équations sont équivalentes.
2. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont parallèles (vecteur normaux colinaires) strictement car leur équations sont incompatibles.
3. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_4$ sont orthogonaux car leur vecteurs normaux $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-10\\2\\2\end{pmatrix}$ sont orthogonaux (produit scalaire nul).
4. Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_5$ sont sécants (vecteurs normaux non colinéaires et non orthogonaux).
   Pour trouver la droite d'intersection, on résout le système $\begin{cases} x+2y+3z+4 &= 0 \\ x+y+z &= 0 \end{cases}$.
   En posant $x=t$ on obtient $\begin{cases} 2y+3z &= -4-t \\ y+z &= -t \end{cases}$
   Par combinaison $(L1-2L2)$, on obtient $z=-4+t$ et (en utilisant la deuxième ligne) $y=4-2t$.
   L'intersection de $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_5$ est donc la droite d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 4-2t \\ z &= -4+t \end{cases}$$