Thème 12
Calcul vectoriel dans l'espace et plans

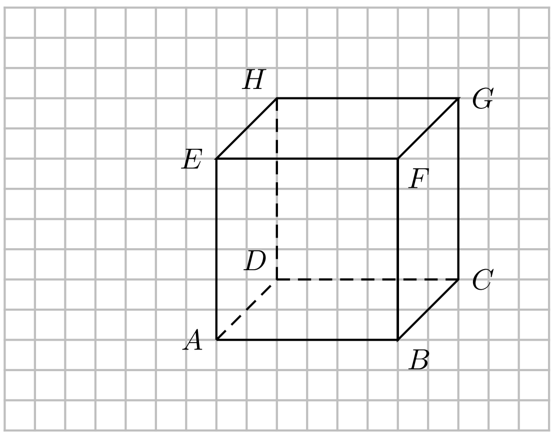
Vérification des acquis

- ☐ Décomposer un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité.
- ☐ Utiliser les coordonnées pour
  - ◇ traduire la colinéarité ;
  - ◇ caractériser l'alignement ;
  - ◇ déterminer une décomposition de vecteurs ;
  - ◇ prouver l'orthogonalité.
- ☐ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- ☐ Étudier la position relative de 2 plans donnés par leurs équations cartésiennes.

Vecteurs et plans de l'espace

12.1 Activité 1 – Vecteurs et alignement.

On considère le cube $ABCDEFGH$, d'arête 6 unités, représenté ci-dessous.
On admet les égalités vectorielles $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$, que l'on pourra donc utiliser sans justification.



1. Placer les points M, N, P, R, S et T définis par les égalités vectorielles suivantes :
- $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AD}$;
- $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$;
- $\overrightarrow{ER} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$;
- $\overrightarrow{HS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HG}$;
- $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{HE}$.

2. **a.** En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{NP}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$. Que peut-on en déduire pour les vecteurs $\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$?

b. Prouver que le vecteur $\overrightarrow{NM}$ est coplanaire aux vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

3. À l'aide des questions précédentes, établir une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NM}$. Que peut-on en déduire pour les points M, N et P ?

4. a. Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont coplanaires.
   b. Prouver que les droites (RS) et (NM) sont parallèles.
5. I est le centre de la face $ABFE$ et L est le point tel que $\overrightarrow{AL} = -\overrightarrow{AB}$.
   a. Justifier les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires.
   b. Exprimer chaque vecteur $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   c. Déduire des résultats précédents les expressions des vecteurs $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{LG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   d. En déduire que les points L, I et G sont alignés.

12.2 **Activité 2 – Vecteurs et parallélogramme.**
On considère un cube $ABCDEFGH$, et les points I, J, K, L milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[EH]$, $[BC]$ et $[GH]$.

1. a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IE}$ et $\overrightarrow{CL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   b. En déduire la nature du quadrilatère $CIEL$.
2. a. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
   b. En déduire la nature du quadrilatère $IJLK$.
3. De manière analogue, étudier la nature du quadrilatère $BIHL$.

12.3 On se place dans un cube $ABCDEFGH$. Pour chacun des vecteurs ci-dessous, indiquer si ce vecteur est coplanaire aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$. Si c'est le cas, exprimer le vecteur en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$.

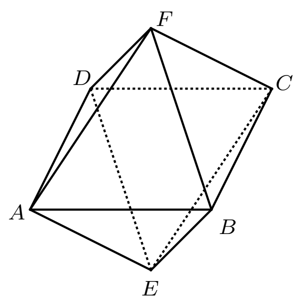
1. $\overrightarrow{BH}$; 2. $\overrightarrow{AG}$; 3. $\overrightarrow{CG}$; 4. $\overrightarrow{DC}$; 5. $\overrightarrow{BE}$; 6. $\overrightarrow{CE}$.

Exercice fil rouge 1 Vecteurs coplanaires

On considère un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ de centre O. Pour chacun des triplets suivants, décomposer un des vecteurs en fonction des deux autres pour prouver leur coplanarité.

1. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$; 2. $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$; 3. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AD}$.

12.4 On considère un octaèdre régulier $ABCDEF$. On admet dans cet exercice la propriété suivante :
Dans l'espace, le plan médiateur d'un segment $[AC]$, défini comme l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et C, est l'unique plan orthogonal au segment $[AC]$ et passant par le milieu de $[AC]$.



1. a. En utilisant le fait que l'octaèdre $ABCDEF$ est régulier et un plan médiateur, prouver que les points E, B, F et D sont coplanaires.
   b. Déterminer la nature du quadrilatère $EBFD$.

2. Le raisonnement précédent peut-il s'appliquer à la figure $EBFA$?
3. a. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DF}$?
   b. Prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{EB}$ sont coplanaires en précisant la relation qui les unit.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{FB}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont-ils coplanaires ? On justifiera la réponse.
5. Prouver, à l'aide de vecteurs colinéaires, que les plans (ABE) et (DFC) sont parallèles.

Exercice fil rouge 2 Vecteurs coplanaires

1. $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{EH}$; 2. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EG}$; 3. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{ED}$.

12.5 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1. Soient $A(1; 2; 3)$, $B(-3; 4; -5)$ et $C(3; 1; 2)$ trois points du plan.
   a. Prouver que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; 2; 0)$ est normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Soient $A(-1; -1; 1)$, $B(2; 2; -2)$ et $C(0; \frac{3}{2}; 1)$ trois points du plan.
   a. Prouver que les points A, B, C ne sont pas alignés.
   b. Montrer que le vecteur $\vec{n}(5; -2; 3)$ est normal au plan (ABC).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice fil rouge 3 Équation cartésienne de plan

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$:

1. $\vec{n}(0; 0; 1)$ et $A(2; 3; 4)$. 2. $\vec{n}(-2; 0; 1)$ et $A(3; -1; 5)$.

12.6 L'algorithme ci-dessous permet de déterminer si un point M de coordonnées (x, y, z) appartient à un plan d'équation $ax + by + cx + d = 0$.

```
Initialisation   Saisir a, b, c, d quatre réels, coefficients de l'équation du plan
                 x, y, z, trois réels, coordonnées du point
Traitement       p prend la valeur ax + by + cz + d
                 Si p = ... alors
                   | Afficher « Le point de coordonnées ... appartient
                   | au plan d'équation ax + by + cz + d = 0. »
                 Sinon
                   | Afficher ...
                 Fin Si
```

1. Compléter l'instruction conditionnelle.
2. Appliquer l'algorithme au plan d'équation $3x - 2y + 5z + 11 = 0$ et au point $M(3; 2; -3)$. Détailler soigneusement toutes les étapes, notamment les entrées.

Exercice fil rouge 4 Équation cartésienne de plan

1. $\vec{n}(-3; 2; 4)$ et $A(0; -5; 6)$.

2. $\vec{n}(3; -5; 2)$ et $A(1; 3; -7)$.

12.7 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points $A(2\ ;\ 1\ ;\ -5)$, $B(0\ ;\ 2\ ;\ 0)$ et $C(-7\ ;\ -3\ ;\ -1)$.

1. Justifier que A, B et C définissent un plan.

2. Montrer que l'équation $24x - 37y + 17z + 74 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

Exercice fil rouge 5 Positions relatives de plans

Étudier la position relative des plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives $x = 1$ et $x = -3$.

12.8 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$\mathrm{A}(1\ ;\ 1\ ;\ 0),\quad \mathrm{B}(1\ ;\ 2\ ;\ 0),\quad \mathrm{C}(1\ ;\ -1\ ;\ 3).$$

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

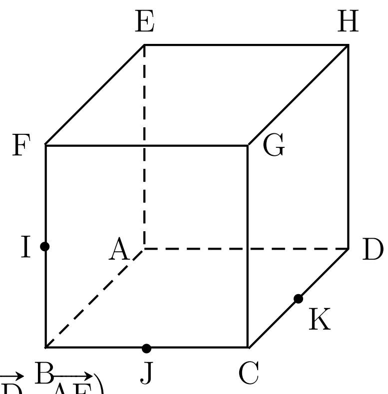
Exercice fil rouge 6 Positions relatives de plans

$P_1 : x + y + z = 0$ et $P_2 : 4x + 2y = 6$.

Sujets du baccalauréat

12.9 *Pondichéry, avril 2016*

ABCDEFGH désigne un cube de côté 1.
Le point I est le milieu du segment [BF].
Le point J est le milieu du segment [BC].
Le point K est le milieu du segment [CD].



L'espace est rapporté au repère $\left(\mathrm{A}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}},\ \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner les coordonnées de A, G, I, J et K dans ce repère.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

3. On désigne par M un point du segment [AG] et t le réel de l'intervalle $[0\ ; 1]$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = t\overrightarrow{\mathrm{AG}}$.

a. Démontrer que $M\mathrm{I}^2 = 3t^2 - 3t + \dfrac{5}{4}$.

b. Démontrer que la distance $M\mathrm{I}$ est minimale pour le point $\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$.

4. Démontrer que pour ce point $N\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$:

a. N appartient au plan (IJK).

b. La droite (IN) est perpendiculaire aux droites (AG) et (BF).

Exercice fil rouge 7 Positions relatives de plans

$P_1 : x + y + z = 0$ et $P_2 : x - y + z + 1 = 0$.

12.10 *Centres étrangers, juin 2014*

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points : A(1 ; 2 ; 7), B(2 ; 0 ; 2), C(3 ; 1 ; 3) et D(3 ; −6 ; 1).

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{u}(1 ; b ; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

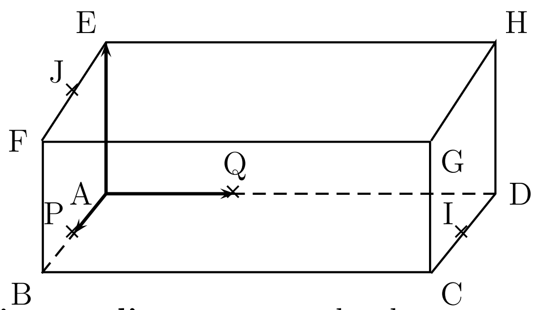
a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

12.11 *Nouvelle Calédonie, mars 2014*

Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que AB = 2, AD = 3 et AE = 1.
On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments [CD], [EF] et [AB].
On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE}\right)$.



On appelle **plan médiateur d'un segment** le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.
L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les points A, B, I, J).

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment [AB].

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.
Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment [IJ].

4. **a.** Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b. Montrer que leur intersection est une droite (Δ) dont une représentation paramétrique est

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t \\ z & = & 3t - 4 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ décrit l'ensemble des nombres réels } \mathbf{R}.$$

c. Déterminer les coordonnées du point Ω de la droite (Δ) tel que $\Omega\text{A} = \Omega\text{I}$.

d. Montrer que le point Ω est centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ.

Exercice fil rouge 8 Positions relatives de plans

$P_1 : \frac{1}{3}x - 3y + \frac{1}{6}z - 7 = 0$ et $P_2 : \frac{-2}{3}x + 6y - \frac{1}{3}z = -14$.

12.12 *Nouvelle-Calédonie, mars 2015*

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Soient le point A_1 de coordonnées $(0; 2; -1)$ et le vecteur $\overrightarrow{u_1}$ de coordonnées $(1; 2; 3)$.
On appelle D_1 la droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$.
On appelle D_2 la droite qui admet pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+k \\ y & = & -2k \\ z & = & 2 \end{array}\right. \quad (k \in \mathbf{R}).$$

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'une droite perpendiculaire à la fois à D_1 et D_2.

1. **a.** Donner une représentation paramétrique de D_1.

b. Donner un vecteur directeur de D_2 (on le notera $\overrightarrow{u_2}$).

c. Le point $A_2(-1\ ;\ 4\ ;\ 2)$ appartient-il à D_2 ?

2. Démontrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

3. Soit le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-3\\4\end{pmatrix}$. On définit la droite Δ_1 passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{v}$ et la droite Δ_2 passant par A_2 et parallèle à Δ_1.
Justifier que les droites D_1 et Δ_1 sont perpendiculaires.
Dans la suite, on admettra que les droites $\boldsymbol{D_2}$ et $\boldsymbol{\Delta_2}$ sont perpendiculaires.

4. Soit P_1 le plan défini par les droites D_1 et Δ_1 et P_2 le plan défini par les droites D_2 et Δ_2.

a. Soit le vecteur $\vec{n}(17; -22; 9)$. Vérifier que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P_1.

b. Montrer que P_1 et P_2 ne sont pas parallèles.

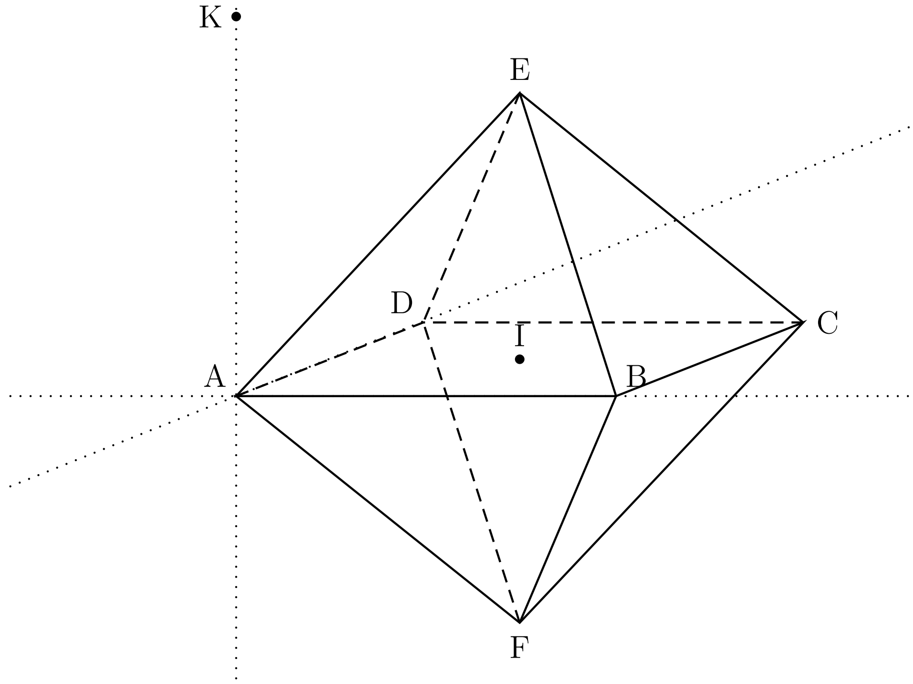
5. Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2. On admettra que le vecteur $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ.
Utiliser les questions précédentes pour prouver qu'il existe une droite de l'espace perpendiculaire à la fois à D_1 et à D_2.

Exercice fil rouge 9 Positions relatives de plans

$P_1 : \sqrt{2}x + 3y - \frac{4}{7}z = -1$ et $P_2 : \sqrt{98}x + 21y - 4z + 8 = 0$.

12.13 *Liban, mai 2016*

On considère un solide ADECBF constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré ABCD de centre I. Une représentation en perspective de ce solide est donnée ci-dessous. Toutes les arêtes sont de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AK}\right)$.

1. **a.** Montrer que $IE = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I, E et F.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}0\\-2\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE).

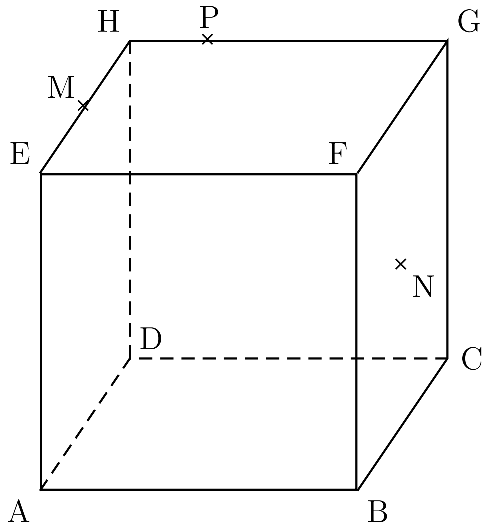
2. On nomme M le milieu du segment [DF] et N celui du segment [AB].

a. Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.

b. Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC).

c. Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide ADECBF par le plan (EMN).

12.14 *D'après Amérique du Nord, mai 2014*
On considère un cube ABCDEFCH. On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que
$\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.



Partie A – Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B – Vérification dans un repère

L'espace est rapporté au repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.
2. Vérifier qu'une équation du plan MNP est $-4x + 2y - 8z + 7 = 0$.
3. Déterminer les représentations paramétriques des droites (MP) et (FG).
4. Calculer les coordonnées du point L.
5. Déterminer les représentations paramétriques des droites (LN) et (CG) puis vérifier que le point T a pour coordonnées $\left(1\ ;\ 1\ ;\ \frac{5}{8}\right)$.
6. Déterminer les coordonnées du point S, intersection des droites (LN) et (BF).
7. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ parallèle à (LN) passant par M.
8. Déterminer les coordonnées du point K, intersection de la droite Δ et de la droite (AE).
9. Vérifier que la droite (SK) est parallèle à la droite (PT).