Thème 11
Dérivation des fonctions composées

Vérification des acquis

☐ Connaître les dérivées des fonctions du type $e^u, \ln u,\ \sqrt{u},\ u^n$

11.1 **Activité 1 – Dérivée de $x \mapsto \sqrt{ax}$**

On considère la fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
Le but de cette activité est de trouver une formule pour la dérivée des fonctions g de la forme $g : x \mapsto f(ax)$, où a est un nombre réel fixé.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g.

1. **a.** Tracer $\mathscr{C}_f$ avec GeoGebra.
   b. Créer un curseur t avec des valeurs allant de 0 à 10 et un incrément de 0,1.
   c. Construire le point M de coordonnées $(t, f(t))$.
   Que peut-on dire de ce point, quelle que soit la valeur de t ?
   d. Créer un curseur a avec des valeurs allant de 0 à 10 et un incrément de 0,1.
   e. Construire le point N de coordonnées $(t, f(a \times t))$.
   Qu'observe-t-on quand on change la valeur de a ?
   f. Fixer la valeur de a à 4, activer la trace du point N et animer le curseur t.
   Quelle est la courbe tracée par le point N ?
2. **a.** En laissant la valeur de a fixée à 4, tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ sur la même figure.
   b. Afficher les nombres $m = f'(a \times t)$ et $n = g'(t)$, puis le quotient $q = \frac{n}{m}$.
   c. En faisant varier la valeur de t, conjecturer une relation entre les nombres $m = f'(a \times t)$ et $n = g'(t)$.
   d. Quelle formule peut-on proposer pour l'expression de la dérivée $g'(x)$?

Exercice fil rouge 1 Calculs de dérivées

Calculer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbf{R}$:

1. $f_1 : x \mapsto e^{x^2+1}$;
2. $f_2 : x \mapsto (x^4 + 3x^2)^5$;
3. $f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x + x^2}$.
4. $f_4 : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$

11.2 Dans chacun des cas suivants, f est une fonction et a un nombre réel en lequel la fonction est définie et dérivable. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

1. $f(x) = e^{-3x^2}$ et $a = 1$;
2. $f(x) = (x^2 - x)^3$ et $a = 2$;
3. $f(x) = \ln(2e^x - x)$ et $a = 0$;
4. $f(x) = \sqrt{x^2 + 7}$ et $a = 3$.

11.3 On s'intéresse dans cet exercice à la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et à sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, notée $\mathscr{C}$.

1. Déterminer l'expression de la fonction dérivée de f.
2. En déduire les variations de f et ses éventuels extremums.
3. À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$, et quand x tend vers $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbf{R}$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.
6. Déterminer l'unique réel α tel que $f(\alpha) = f'(\alpha)$, puis l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse α.
7. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.
8. Soit β un réel strictement positif. On note $y = mx + p$ l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse β. On ne cherchera pas à déterminer les expressions de m et p.
   a. Déterminer le signe de m en justifiant clairement.
   b. Que peut-on dire de $f(\beta)$ et de $f(-\beta)$?
   c. Justifier que $f'(-\beta) = -f'(\beta)$.
   d. Déduire des questions précédentes l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $-\beta$, exprimée en fonction de m et p.

Exercice fil rouge 2 Calculs de dérivées

1. $f_1 : x \mapsto (\mathrm{e}^x + 1)^2$;
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - x}$;
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x+1} - 1}{\mathrm{e}^{2x+1} + 1}$;
4. $f_4 : x \mapsto 2\ln(\mathrm{e}^x + 1)$

11.4 Les fonctions *sinus hyperbolique* et *cosinus hyperbolique*, notées respectivement sh et ch, sont définies sur $\mathbf{R}$ par

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \text{ et } \mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

1. Déterminer $\mathrm{sh}'(x)$.
2. Étudier le signe de $\mathrm{sh}'(x)$ et en déduire les variations de sh sur $\mathbf{R}$.
3. Calculer $\mathrm{sh}(0)$ et en déduire le signe de $\mathrm{sh}(x)$, que l'on exposera dans un tableau.
4. Démontrer que $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$.
5. Étudier le signe de la fonction dérivée de ch et en déduire les variations de ch sur $\mathbf{R}$.
6. Que peut-on dire des fonctions définies par $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)$ et $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$?

11.5 On s'intéresse dans cet exercice à la famille des fonctions g_n définies pour tout entier n strictement positif par

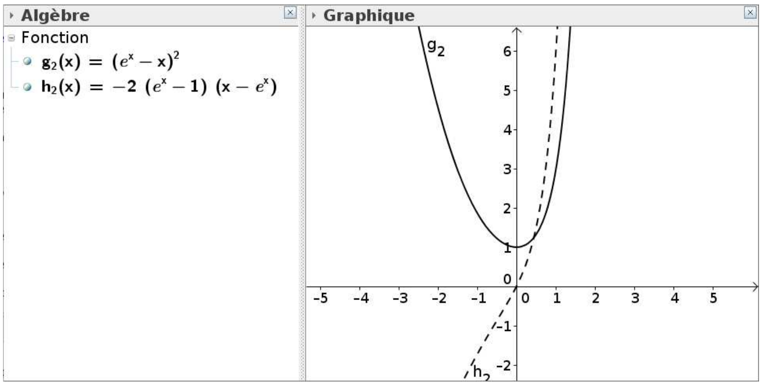
$$g_n(x) = (\mathrm{e}^x - x)^n.$$

Partie A – La fonction g_1

1. Donner l'expression de la fonction g_1.
2. Étudier les variations de la fonction g_1.
3. Déterminer le signe de la fonction g_1 sur $\mathbf{R}$.

Partie B – La fonction g_2

Voici une copie d'écran du logiciel Geogebra. La fonction dérivée de g_2 est notée h_2 avec le logiciel pour des raisons techniques, mais on utilisera plutôt la notation g_2'.



1. Quelle est la fonction représentée par une ligne continue ? Justifier.
2. Vérifier la validité de la formule donnée pour $g_2'(x)$.
3. En utilisant un résultat de la partie A, étudier le signe de $g_2'(x)$.
4. En déduire les variations de la fonction g_2. Ces variations sont-elles cohérentes avec la courbe représentative ?

Partie C – Variations des fonctions g_n

1. Justifier que les courbes représentatives des fonctions g_n passent toutes par un même point, dont on donnera les coordonnées.
2. Prouver que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 et pour tout réel x,

$$g_{n+1}'(x) = (n+1)(\mathrm{e}^x - 1)g_n(x).$$

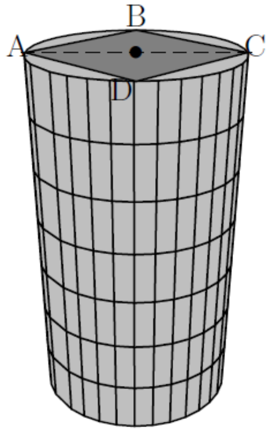
3. Prouver par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, la fonction g_n est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et croissante sur $]0; +\infty[$.

11.6 On souhaite extraire la plus grosse poutre (parallélépipède rectangle) possible d'un arbre parfaitement cylindrique de rayon $R = 50$ cm.

Soit x la distance AB (voir schéma ci-contre).

Trouver la ou les valeurs de x (en cm) qui rendent le volume de cette poutre maximal.

Indication : Exprimer l'aire du triangle ABC en fonction de x.



Exercice fil rouge 3 Calculs de dérivées

1. $f_1 : x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$;
2. $f_2 : x \mapsto (7x+2)^5$;
3. $f_3 : x \mapsto \ln(3x+1)$;
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+2x+1}$;

11.7 On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2\mathrm{e}^x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A – Quelques généralités

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Quel est le signe de f sur $\mathbf{R}$?
3. Prouver que la fonction dérivée de f est définie par la formule
$$f'(x) = \frac{x(2+x)\mathrm{e}^x}{2f(x)}.$$
Cette fonction dérivée est-elle définie sur $\mathbf{R}$?
4. Étudier le signe de f' sur son ensemble de définition.
5. En déduire les variations de f.
6. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
7. Dresser le tableau de variations complet de f sur son ensemble de définition.

Partie B – Étude de la tangente en 0

1. Justifier que $\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} = \sqrt{\mathrm{e}^x}$.
2. Simplifier, en fonction du signe de x, l'expression $\sqrt{x^2}$.
3. Déduire des deux questions précédentes deux expressions simplifiées de $f'(x)$, l'une valable pour $x > 0$, l'autre valable pour $x < 0$.
4. Les deux formules ci-dessus sont en fait définies en $x = 0$, même si $f'(x)$ ne l'est pas. Donnent-elles la même valeur en 0 ? Pourrait-on utiliser ces formules pour définir arbitrairement une valeur pour $f'(0)$?
5. Tracer à la calculatrice les courbes représentatives des fonctions f et f'. Qu'observe-t-on pour ces deux fonctions en $x = 0$?

Exercice fil rouge 4 Calculs de dérivées

1. $f_1 : x \mapsto (\mathrm{e}^{2x} + x + 2)^8$;
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$;
3. $f_3 : x \mapsto x\ln(\sqrt{x})$;
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{(\mathrm{e}^{3x+1})^8}{\mathrm{e}^{x+8}}$;
5. $f_5 : x \mapsto \sqrt{\mathrm{e}^{x^2}+1}$.

11.8 Soit a un réel positif ou nul et b un réel strictement supérieur à 1.
On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\ln(ax+b)}$.
Montrer que f admet un extremum si et seulement si elle est constante sur $]0;+\infty[$.

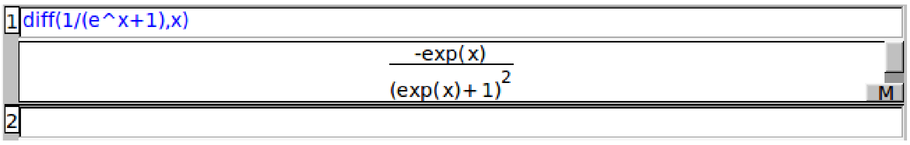
11.9 Un algorithme de dérivation

L'algorithme ci-dessous, écrit en langage naturel, détaille les étapes à suivre pour dériver une fonction composée.

Entrées :
Saisir deux fonctions f et u, telles que $g = f \circ u$ soit la fonction à dériver.
Traitement :
Déterminer $f'(x)$.
Écrire $f'(u(x))$, en remplaçant chaque x par l'expression de $u(x)$ dans la formule de $f'(x)$.
Déterminer $u'(x)$.
Sortie :
Afficher $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$.

1. **a.** Appliquer l'algorithme à la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$. Détailler clairement chaque étape, en particulier l'identification des fonctions f et u en entrée.
   b. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g.

2. Ci-dessous est reproduit un écran du logiciel de calcul formel Xcas.



   a. Expliciter les fonctions g, f et u dans ce cas.
   b. Expliquer, en suivant l'algorithme, le résultat donné par le logiciel.
   c. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]0;+\infty[$ et en déduire les variations de g.
   d. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection de la courbe de g avec l'axe des ordonnées, puis l'équation de la tangente à la courbe en ce point.

11.10 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ par $f(x) = \ln\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)$.

1. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ on a $f'(x) = \dfrac{4}{4-x^2}$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$.

11.11 Activité 2 – Dérivées des fonctions $x \mapsto e^{-kx}$ et $x \mapsto e^{-kx^2}$

On s'intéresse dans cette activité à deux familles de fonctions dépendant d'un paramètre réel strictement positif k. Ces familles sont définies pour tout réel x et pour tout réel strictement positif k par $f_k(x) = e^{-kx}$ et $g_k(x) = e^{-kx^2}$.

Partie A – La famille des fonctions f_k

1. **a.** Déterminer les fonctions dérivées de f_1 et f_2.
   b. Déterminer, en fonction du réel k, la fonction dérivée de la fonction f_k.
2. Déduire de la question précédente les variations de la fonction f_k pour $k > 0$ et exposer les résultats dans un tableau de variations complet.
3. On peut utiliser GeoGebra pour observer certaines propriétés des fonctions f_k.
   a. Créer un nouveau document GeoGebra, puis définir le paramètre $k = 1$.
   b. Définir la fonction f_k, dépendant du paramètre k, que l'on appellera simplement f dans le logiciel.
   c. Observer et commenter les modifications sur l'allure de la courbe de f_k quand la valeur de k change.
   d. Déterminer la fonction ${f_k}'$ et tracer sa courbe en tapant simplement `f'(x)` dans la ligne de saisie. Vérifier ainsi la formule trouvée à la main.
   e. Pour quelle(s) valeur(s) de k les courbes de f_k et de ${f_k}'$ sont-elles symétriques ?
   f. Pour quelle(s) valeur(s) de k a-t-on la relation ${f_k}'(0) = -5f_k(0)$? Trouver cette valeur graphiquement puis vérifier la relation par le calcul.

Partie B – La famille des fonctions g_k

1. **a.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction g_1.
   b. Déterminer la fonction dérivée de la fonction g_2.
   c. Déterminer, en fonction du réel k, la fonction dérivée de la fonction g_k.
2. Déduire de la question précédente les variations de la fonction g_k pour $k > 0$ et exposer les résultats dans un tableau de variations complet.
3. **a.** Comme dans la partie A, représenter la fonction g_k (appelée g dans le logiciel) à l'aide de GeoGebra, avec un paramètre k modifiable.
   b. Comparer les courbes des fonctions g_1 et g_{20}. Quelles sont les propriétés communes de ces deux courbes et leurs différences notables ?
   c. Déterminer la fonction ${g_k}'$ et tracer sa courbe en tapant simplement `g'(x)` dans la ligne de saisie. Vérifier ainsi la formule trouvée à la main.
4. Dans les questions suivantes, on va chercher à l'aide de GeoGebra la valeur du paramètre k telle que g_k et ${g_k}'$ aient le même maximum.
   a. Rappeler le maximum de la fonction g_k. Sa valeur dépend-elle de k ?
   b. Déterminer graphiquement le maximum de la fonction ${g_2}'$.
   c. Déterminer la fonction ${g_k}''$, dérivée de ${g_k}'$, et tracer sa courbe en tapant simplement `g"(x)` dans la ligne de saisie.
   d. Expliquer en quoi la fonction ${g_k}''$ est utile pour déterminer la valeur de x pour laquelle ${g_k}'$ atteint son maximum. Effectuer sur GeoGebra la construction adéquate.
   e. Déterminer, avec GeoGebra, une valeur approchée de l'antécédent du maximum de ${g_k}'$ pour les valeurs de k suivantes : $k = 0,5$; $k = 1$; $k = 2$; $k = 4.5$.

f. A partir des questions précédentes, conjecturer une formule pour l'antécédent du maximum de ${g_k}'$.

g. Déterminer graphiquement la valeur de k pour laquelle g_k et ${g_k}'$ ont le même maximum.

5. Dans les questions suivantes, on va retrouver par le calcul la valeur du paramètre k telle que g_k et ${g_k}'$ aient le même maximum.

a. Déterminer, en fonction du réel k, la fonction dérivée seconde de la fonction g_k, notée ${g_k}''$.

b. Résoudre, en fonction du réel strictement positif k, l'équation ${g_k}''(x) = 0$, puis étudier les variations de la fonction ${g_k}'$.

c. Déduire de la question précédente, en fonction du réel k, l'antécédent du maximum de ${g_k}'$, que l'on appelera dans la suite α_k.

d. Exprimer ${g_k}'(\alpha_k)$ en fonction de k, en simplifiant l'expression.

e. En déduire la valeur du paramètre k telle que g_k et ${g_k}'$ aient le même maximum.

11.12 Le fabricant de chocolats *Chocobelge* désire produire pour Noël des chocolats pleins, de 80 grammes, ayant la forme d'une pyramide à base carrée. Souhaitant limiter le coût de l'emballage individuel d'un chocolat, *Chocobelge* cherche à déterminer la surface minimale que peuvent avoir ces chocolats.

1. Soit $ABCDS$ une pyramide régulière de base carrée $ABCD$. On note L la longueur d'un côté de sa base et H sa hauteur.

Réalisez un dessin en perspective cavalière illustrant cette situation.

On gardera ces notations pour la pyramide représentant le chocolat.

2. Un maître chocolatier indique qu'il faut 250 mL de chocolat pour obtenir 120g de chocolat. En déduire, sous forme fractionnaire, le volume en mL de chocolat nécessaire à la fabrication d'un chocolat pyramidal.

3. En déduire une expression de H en fonction de L.

4. On note O le centre du carré $ABCD$ et I le milieu de $[AB]$. On rappelle que le triangle SOI est un triangle rectangle en O. En déduire, en fonction de H et L, la longueur SI.

5. En déduire l'aire de ABS en fonction de H et L.

6. Montrer enfin que la surface totale que l'on cherche minimiser vaut, en fonction de L : $S_p = L^2 + 2L\sqrt{\dfrac{500^2}{L^4} + \dfrac{L^2}{4}} = L^2 + \dfrac{1}{L}\sqrt{1000^2 + L^6}$.

7. A l'aide de la calculatrice, déterminer L à 10^{-1} près telle que S_p soit minimale. Interpréter ce résultat pour le chocolatier.

8. Pour tout réel x strictement positif, on définit la fonction f par $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}\sqrt{1000^2 + x^6}$.

a. Montrer que, pour tout réel x strictement positif,
$$f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1000^2 + x^6}}\left(2x^3\sqrt{1000^2 + x^6} - 1000^2 + 2x^6\right).$$

b. Montrer que $2x^3\sqrt{1000^2 + x^6} - 1000^2 + 2x^6 > 0$ si et seulement si $x^6 > \dfrac{500^2}{2}$.

On admet que cela est équivalent à $x > \left(\dfrac{500^2}{2}\right)^{1/6}$.

c. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$. Est-ce cohérent avec la question 7 ?

Sujets de baccalauréat

11.13 *D'après Polynésie, juin 2012*

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

On considère les points B $(100\,;\,100)$ et C $\left(50\ ;\ \dfrac{50}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.
On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = x\mathrm{e}^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ.

1. **a.** Montrer que le couple $(a\ ;\ b)$ est solution du système :

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

b. En déduire que, pour tout x réel, $f(x) = x\mathrm{e}^{0,01x-1}$.

2. Étudier les variations de la fonction f.

3. Étudier la position relative de la courbe Γ et de la droite (D).

11.14 *Nouvelle-Calédonie, novembre 2015*

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ par

$$f_a(x) = \mathrm{e}^{x-a} - 2x + \mathrm{e}^{a}.$$

1. Montrer que pour tour réel a, la fonction f_a possède un minimum.

2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?