Ce qu'il faut savoir

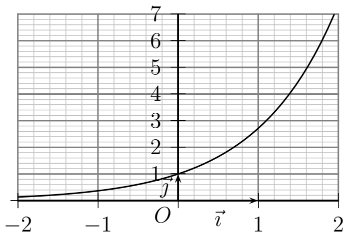
Cette fiche est un résumé **non rigoureux** des formules et méthodes vues en TS

1 Fonction exponentielle

Définition : Il existe une unique fonction f telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

propriétés analytiques :
- strictement positive
- strictement croissante
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
- Dérivation $(e^u)' = u'e^u$.

propriétés algébriques :
- $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y$
- $\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$
- $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$

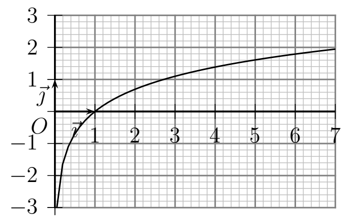


2 Fonction logarithme népérien

Définition : si $x > 0$, $\ln(x)$ est le nombre dont l'exponentielle vaut x.

propriétés analytiques :
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$
- pour tout x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$
- pour tout $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$
- strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
- Dérivation : Si pour tout x, $u(x) > 0$, $\ln(u)' = \frac{u'}{u}$

propriétés algébriques :
Si $x > 0$ et $y > 0$ alors
- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$
- $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$
- $\ln(x^n) = n \ln x$.



3 Dérivation

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
ku	ku'
$u \times v$	$u' \times v + v' \times u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$

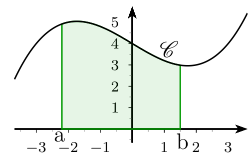
Fonction	Fonction dérivée
e^u	$u'e^u$
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$
u^n avec $n \in \mathbf{Z}^\star$	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

4 Étude de courbe

- Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
- Intersection avec l'axe (Ox) : on cherche x tel que $f(x) = 0$
- Intersection avec l'axe (Oy) : $f(0) = \cdots$
- Tangente parallèle à l'axe (Ox) : on cherche x tel que $f'(x) = 0$
- Position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$: Étude du signe de $f(x) - g(x)$
- Montrer qu'une équation a une unique solution : Résolution ou TVI

5 Intégration

Définition : Si f est une fonction **positive** et **continue**, on note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la région du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathscr{A}$

Propriétés :
- Valeur moyenne : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- Relation de Chasles : $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- Linéarité : $\int_a^b \Big(mf(x) + ng(x)\Big)\mathrm{d}x = m\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + n\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- Relation d'ordre : Si $f(x) < g(x)$ sur $[a; b]$ alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
- Calcul : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ où F est une primtive de f.

Ce qu'il faut savoir

Cette fiche est un résumé **non rigoureux** des formules et méthodes vues en TS

1 Généralités

- sens de variation : étude du signe de $u_{n+1} - u_n$
- théorème de comparaison : Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$
- théorème des gendarmes : Si $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = l$
- théorème limite monotone : toute suite croissante et majorée converge

2 Suites arithmétiques

- relation récursive : $u_{n+1} = u_n + r$
- prouver qu'une suite est arithmétique : $u_{n+1} - u_n =$ constante
- prouver qu'une suite n'est pas arithmétique : $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$
- relation explicite : $u_n = u_0 + n \times r$
- somme des termes : $u_0 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2} = \text{nb terme}\frac{\text{premier}+\text{dernier}}{2}$
- limites : $\pm\infty$ suivant signe de r

3 Suites géométriques

- relation récursive : $u_{n+1} = q \times u_n$
- prouver qu'une suite est géométrique : $\frac{u_{n+1}}{u_n} =$ constante
- prouver qu'une suite n'est pas géométrique : $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$
- relation explicite : $u_n = u_0 \times q^n$
- somme des termes : $u_0 + \cdots + u_n = u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1^{\text{er}}\text{terme} \times \frac{1-q^{\text{nb terme}}}{1-q}$
- limites :
  - $\pm\infty$ si $q > 1$
  - 0 si $-1 < q < 1$
  - u_0 si $q = 1$
  - pas de limite si $q \leqslant -1$

4 Démonstration par récurrence

Avec une égalité : on part de u_{k+1} et l'on revient à u_k

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2^n - 1$.

1. **Initialisation :** Pour $n = 0$,
   - d'une part $u_0 = 0$
   - d'autre part $2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

   donc la propriété est vraie au rang 0.
2. **Hérédité :** On suppose qu'il existe un rang k tel que $u_k = 2^k - 1$. Il faut montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 2u_k + 1 \\ &\overset{HR}{=} 2(2^k - 1) + 1 \\ &\overset{dvp}{=} 2 \times 2^k - 2 + 1 \\ &\overset{prop}{=} 2^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

   donc la propriété est donc vraie au rang $k+1$.
3. **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\forall n in \mathbf{N}, u_n = 2^n - 1$$

Avec une inégalité : on part de l'hypothèse de récurrence

Soit a un réel strictement positif. Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

1. **Initialisation :** Pour $n = 0$,
   - d'une part $(1+a)^0 = 1$
   - d'autre part $1 + 0 \times a1$.

   La propriété est vraie au rang 0.
2. **Hérédité :** On suppose qu'il existe un rang k tel que $(1+a)^k \geqslant 1 + ka$
   Il faut montrer que la propriété est vraie au rang $k+1$.

$$\begin{aligned} (1+a)^k &\geqslant 1 + ka \\ (1+a)^k(1+a) &\geqslant (1+ka)(1+a) \\ (1+a)^{k+1} &\geqslant 1 + a + ka + ka^2 \end{aligned}$$

   or ka^2 est positif donc $1 + a + ka + ka^2 > 1 + a + ka = 1 + (k+1)a$ donc

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)a$$

   La propriété est donc vraie au rang $k+1$.
3. **Conclusion :** La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier naturel.

$$\forall a \in \mathbf{R}^{+*}, \quad \forall n \in \mathbf{N}(1+a)^n \geqslant 1 + na$$

Ce qu'il faut savoir

Cette fiche est un résumé **non rigoureux** des formules et méthodes vues en TS

1 Loi binomiale

Définition : Une variable alétoire X suit une **loi binomiale** si
- on repète **n** fois de façon **indépendante** une expérience aléatoire ;
- l'experience est à **2** issues : **Succès** de probabilité **p** et **Echec** de probabilité **1-p** ;
- la variable X compte le nombre de **Succès** au cours des **n** expériences.

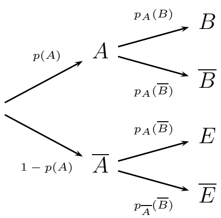
On note parfois $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n;p)$

Calculs :
- $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (à la calculatrice)
- Espérance : $E(x) = n \times p$
- Variance : $V(x) = n \times p \times (1-p)$
- Écart-type : $\sigma = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$
- Intervalle fluctuation : Si $n \leqslant 30$; $np \leqslant 5$; $n(1-p) \leqslant 5$, L'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence, pour un échantillon de taille n, selon la loi binomiale de paramètre n et p est :

$$[\frac{a}{n} \ ; \ \frac{b}{n}] \text{ où } \begin{cases} a \text{ est le plus petit entier tel que} P(X \leqslant a) > 0,025 \\ b \text{ est le plus petit entier tel que} P(X \leqslant b) \leqslant 0,975 \end{cases}$$

2 Probabilités conditionnelles

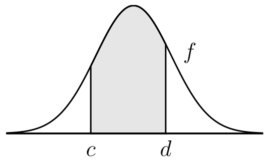
Formules :
- événement contraire : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- union : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- probabilité conditionnelle : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$
- intersection : $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$
- formule probabilités totales : $p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$
- indépendance : A et B independant ssi $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ donc $p_A(B) = p(B)$



3 Variables aléatoires continues

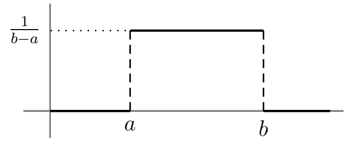
Cas général

- Définition : $P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t$
- Propriété : f doit vérifier la propriété $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 1$
- Esperance : $E(X) = \int_a^b t f(t)\mathrm{d}t$



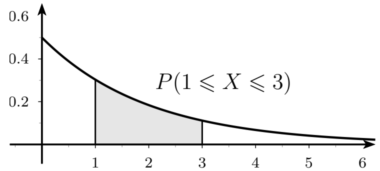
Loi uniforme sur intervalle [a ;b]

- fonction de densité : $\frac{1}{b-a}$ pour $x \in [a,b]$ et 0 sinon
- Probabilité : $P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$
- Esperance : $E(X) = \frac{a+b}{2}$



Loi exponentielle

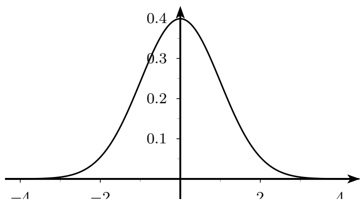
- fonction de densité : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ sur $[0;+\infty[$
- Probabilité : $P(c \leqslant X \leqslant d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$
  $P(X \geqslant c) = e^{-\lambda c}$
- Propriété de durée de vie sans vieillissement : $P_{X \geqslant c}(X \geqslant c+h) = P(X \geqslant h)$.
- Esperance : $E(x) = \frac{1}{\lambda}$



Loi normale

Définition : Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{R}$ suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathscr{N}(0;1)$, si sa densité de probabilité est la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$



On utlise souvent la symétrie de la courbe pour calculer des probabilités lorsque l'on en connait une.

Probabilités d'événements classiques :
Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathscr{N}(m, \sigma^2)$. Alors
- $P(m - \sigma \leqslant X \leqslant m + \sigma) \approx 0,68$;
- $P(m - 2\sigma \leqslant X \leqslant m + 2\sigma) \approx 0,95$;
- $P(m - 3\sigma \leqslant X \leqslant m + 3\sigma) \approx 0,997$.

Seuils usuels :
$u_{0,05} \approx 1,96$ ce qui signifie que $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$.
$u_{0,01} \approx 2,58$ ce qui signifie que $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$.

Ce qu'il faut savoir

Cette fiche est un résumé **non rigoureux** des formules et méthodes vues en TS

1 Forme algébrique

Définition :

- On appelle **ensemble des nombres complexes** l'ensemble des nombres de la forme $x + \mathrm{i}y$, où $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ et i est un nombre vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$. Cet ensemble est noté $\mathbf{C}$.
- L'écriture $z = x + \mathrm{i}y$ est appellée **forme algébrique** du nombre z.
- Le réel x est appelé **partie réelle** du complexe z et noté $\mathfrak{Re}(z)$.
- Le réel y est appelé **partie imaginaire** du complexe z et noté $\mathfrak{Im}(z)$.
- Le nombre $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ est appelé **conjugué de z**. Il sert, entre autre, à rendre réel des dénominateurs afin d'obtenir des formes algébriques.

Exemple : On donne $z_1 = -2 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 - \mathrm{i}$

1. $z_1 + z_2 = (-2 + 3\mathrm{i}) + (4 - \mathrm{i}) = -2 + 4 + \mathrm{i}(3 - 1) = 2 + 2\mathrm{i}$;
2. $2z_1 = 2(-2 + 3\mathrm{i}) = -4 + 6\mathrm{i}$;
3. $z_1 \times z_2 = (-2 + 3\mathrm{i})(4 - \mathrm{i}) = -8 + 2\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 3\mathrm{i}^2 = -8 + 14\mathrm{i} - (-3) = -5 + 14\mathrm{i}$.
4. $z_3 = \dfrac{2}{3 + \mathrm{i}} = \dfrac{2(3 - \mathrm{i})}{(3 + \mathrm{i})(3 - \mathrm{i})} = \dfrac{6 - 2\mathrm{i}}{9 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{6 - 2\mathrm{i}}{10} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{i}$.
5. $z_4 = \dfrac{1 + 2\mathrm{i}}{5 - 6\mathrm{i}} = \dfrac{(1 + 2\mathrm{i})(5 + 6\mathrm{i})}{(5 - 6\mathrm{i})(5 + 6\mathrm{i})} = \dfrac{5 + 6\mathrm{i} + 10\mathrm{i} + 12\mathrm{i}^2}{5^2 - (6\mathrm{i})^2} = \dfrac{5 + 16\mathrm{i} - 12}{25 - 36(-1)} = \dfrac{-7 + 16\mathrm{i}}{61}$.

Propriétés :

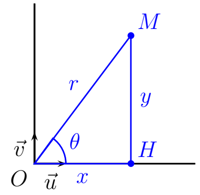
1. $\overline{\overline{z}} = z$;
2. $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$;
3. $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\mathfrak{Im}(z)$.

Équation du second degré et nombres complexes :
On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $x = -\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbf{R}$ mais admet deux solutions conjuguées dans $\mathbf{C}$: $z_1 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 - \overline{z_1} = \dfrac{-b - \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

2 Forme trigonométrique

Définitions :



- À tout point M de coordonnées $(x; y)$, on associe le **nombre complexe** $z = x + iy$.
- Ce nombre complexe est appelé **affixe** du point M.
- M est le **point image** de z.
- Soit un point M d'affixe z dans le plan complexe ;
  - la distance OM est appelée **module** de z et notée $|z|$;
  - une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ est appelée **argument** de z et notée $\arg(z)$.
- L'écriture $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est appellée **forme trigonométrique** du nombre z. Elle est parfois notée $z = [r, \theta]$.

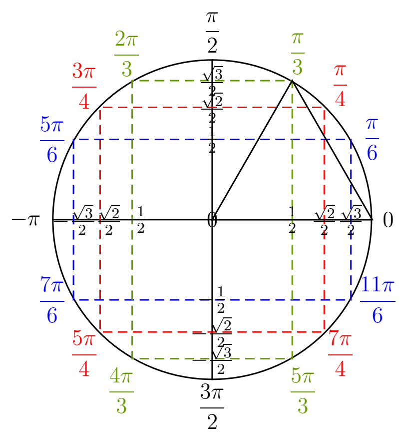
Propriétés des modules : Pour tout nombre complexe z et z', on a :

- **Conjugué :** $|\overline{z}| = |z|$ et $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.
- **Produit :** $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg zz' = \arg z + \arg z'$
- **Quotient :** si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$.

3 Complexes et Géométrie

- Le point I milieu de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2}$
- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- $AB = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) = [2\pi]$.
- Corollaire hors-programme mais utile :$(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BA}) = \arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) [2\pi]$.

Les lignes trigonométriques remarquables :



Ce qu'il faut savoir

Cette fiche est un résumé **non rigoureux** des formules et méthodes vues en TS

1 Points et vecteurs de l'espace

Si A et B sont des points de coordonnées respectives (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B), alors

- les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}, \frac{z_A+z_B}{2}\right)$;
- les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$;
- si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé, alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non tous nuls et non colinéaires deux à deux sont **coplanaires** si, et seulement si, il existe deux réels α et β, éventuellement nuls, tels que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de l'espace sont **colinéaires** si et seulement si les coordonnées sont proportionnelles.

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls de l'espace sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul.

2 Droites de l'espace

Représentation paramétrique : Une représentation paramétrique de la droite Δ passant par $A(2; -1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\4\\7\end{pmatrix}$ est :

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & = & x_A + x_{\vec{u}}t & = 2 + 5t \\ y & = & y_A + y_{\vec{u}}t & = -1 + 4t \\ z & = & z_A + z_{\vec{u}}t & = 7t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbf{R})$$

Positions relatives de deux droites : Deux droites de l'espace sont

- confondues si elles sont coplanaires et ont 2 points communs ;
- sécantes si elles sont coplanaires et ont un unique point commun ;
- parallèles si elles sont coplanaires et n'ont aucun point commun ;
- non-coplanaires sinon.

Intersection de droites : Pour déterminer l'intersection éventuelle de droites, il faut chercher une valeur de t et une valeur t' vérifiant les trois équations. On conclut suivant le nombre de solutions du système.

3 Plans de l'espace

Équation et vecteur normal : Tout plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où d est un réel. Réciproquement, si $\mathscr{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, alors le vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

Positions relatives de deux plans : Deux plans de l'espace sont

- confondus si ils ont au moins 3 points communs non alignés ;
- sécants si leur intersection est une droite ;
- parallèles si ils n'ont aucun point commun.

L'intersection de deux plans est donc un plan, une droite ou l'ensemble vide.