Équations différentielles d'ordre 2

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
-

16.1 Résoudre chacune des équations différentielles suivantes :

1. $x'' - 6x' + 8x = 0$
2. $x'' - 6x' + 9x = 0$
3. $x'' - 4x' + 20x = 0$

16.2 En physique, l'étude d'un mouvement amorti conduit à l'équation différentielle

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0 \quad (E)$$

dans laquelle x désigne une fonction numérique de la variable t, admettant des dérivées première et seconde notées respectivement $x'(t)$ et $x''(t)$.

1. Résoudre cette équation sur $\mathbf{R}$.
2. Trouver la solution particulière de cette équation prenant la valeur 0 pour $t = 0$ et dont la dérivée prend la valeur 1 pour $t = 0$.
3. Soit f la fonction numérique, telle que, pour tout élément t de l'intervalle $[0, \pi]$,
$$f(t) = e^{-t} \sin t.$$
   a. Justifer le signe de f sur l'intervalle $[0; \pi]$
   b. Tracer à la calculatrice la représentation graphique C de f.
4. On se propose de calculer, en cm^2 une valeur approchée par défaut à 1 mm^2 près de l'aire du domaine plan délimité par la courbe C et l'axe des abscisses. À cette fin, deux méthodes sont proposées :
   a. Déterminer l'intégrale $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t$ au moyen de deux intégrations par parties successives.
   b. En utilisant l'équation différentielle (E) écrite sous la forme
$$x = -\frac{1}{2}(x'' + 2x'),$$
   déterminer une primitive F de f sur $[0, \pi]$.
   En déduire l'expression de $\int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t$ à l'aide de F.
   c. Déterminer une valeur approchée de l'aire considérée à 1 mm^2 près par défaut.

EDL du deuxième ordre avec second membre

16.3 On considère l'équation différentielle $(E) : y''(x) - 2y'(x) + y(x) = x^2$

1. a. Montrez que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
   b. En déduire la forme générale des solutions de (E).
2. Montrez que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).

3. Montrez que la fonction h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

16.4 Soit l'équation différentielle (E)

$$y'' + 4y' + 3y = e^{-2x}$$

dans laquelle y est une fonction de la variable réelle x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$.

1. Résoudre l'équation $y'' + 4y' + 3y = 0$.

2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme Ae^{-2x}, où A est un réel que l'on déterminera.

3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

4. Déterminer la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

16.5 On considère l'équation différentielle (E) :

$$x'' - 2x' - 3x = 3t^2 + 1$$

où x est une fonction numérique de la variable t, définie et deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, x' la fonction dérivée de x et x'' la fonction dérivée seconde de x.

1. Résoudre l'équation $x'' - 2x' - 3x = 0$.

2. Chercher une solution particulière de l'équation (E) sous la forme d'une fonction polynôme du second degré.

3. En déduire la solution générale de (E).

4. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$.

16.6 On veut résoudre l'équation différentielle

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^{-x},$$

notée (E), où y est une fonction de la variable réelle x, deux fois dérivable sur l'ensemble des nombres réels.

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$.

- **b.** Déterminer une fonction u, deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que la fonction y_0, définie par $y_0(x) = u(x)e^{-x}$, soit solution de l'équation différentielle (E).
- **c.** Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
- **d.** Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

2. On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$f(x) = e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right).$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 10 cm).

- **a.** Montrer que, pour tout nombre x appartenant à $[0;1]$, $f'(x) = -\dfrac{x^2}{2}e^{-x}$.
- **b.** Étudier le signe de f' et dresser le tableau de variation de f.
- **c.** Tracer la courbe C dans le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

d. Sur la figure, on constate que l'équation $f(x) = 0,95$ admet une solution unique. Par lecture graphique, donner une valeur approchée à 10^{-1} près de cette solution (on fera apparaître sur la figure les tracés permettant cette lecture).

e. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

16.7 Soit (E) l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = 4e^{-x}$$

où y est une fonction de la variable x, deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, y' sa fonction dérivée et y'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

1. Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $(E_0) : y'' + 2y' + y = 0$.
2. Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbf{R}$ par : $y_1(x) = 2x^2e^{-x}$ est une solution particulière sur $\mathbf{R}$ de (E).
3. En déduire la solution générale sur $\mathbf{R}$ de (E).
4. Déterminer la solution y_2 de (E) qui vérifie : $y_2(0) = 4$ et $y_2'(0) = 1$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$(unité graphique 1 cm).

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. On justifiera les résultats obtenus.
2. Étudier les variations de f.
3. Construire la courbe C.
4. Soit $\mathcal{A}$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$ et la courbe $\mathcal{C}$.

   Donner la valeur exacte de $\mathcal{A}$, puis la valeur approchée à 10^{-3} près, de deux façons différentes :
   - en effectuant successivement deux intégrations par parties ;
   - en utilisant le fait que f est une solution de l'équation différentielle (E).

16.8 *Good vibrations*

Une masse M est posée sur le sol à l'aide d'une suspension amortie.
Pour tout t de $[0, +\infty[$, on désigne par $x(t)$ la longueur du ressort (en mètres).
On établit en mécanique que la fonction de la variable t définie sur $[0, +\infty[$ par $t \mapsto x(t)$ est solution de l'équation différentielle : $x'' + kx' + 25x = 20$ où k désigne une constante réelle positive qui dépend des caractéristiques de l'amortisseur.

Partie A

Les questions **l.** et **2.** sont, dans une large mesure, indépendantes.

1. Le but de cette partie est la résolution de l'équation différentielle :

$$x'' + kx' + 25x = 0 \quad (1)$$

   où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et k une constante positive.

a. Érire l'équation caractéristique de l'équation (1).

b. Donner suivant les valeurs de k les différentes formes des solutions.

c. Déterminer l'intervalle dans lequel il faut choisir le nombre k pour que l'équation (1) n'admette pas de solutions faisant intervenir des fonctions trigonométriques, donc que le système ne soit pas soumis à des oscillations.

2. Dans la suite on prend $k = 10$ et on considère l'équation différentielle :

$$x'' + 10x' + 25x = 20 \quad (2)$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$.

a. Résoudre l'équation différentielle :

$$x'' + 10x' + 25x = 0 \quad (3)$$

b. Déterminer le nombre réel m tel que la fonction constante h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(t) = m$ soit solution de l'équation (2).

c. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de l'équation (2).

d. Déterminer la solution particulière x de l'équation (2) qui vérifie les conditions initiales $x(0) = 0,4$ et $x'(0) = 0$.

Partie B

Soit x la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$x(t) = (-2t - 0,4)e^{-5t} + 0,8$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité graphique 10 cm).

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t)$. En déduire l'existence d'une asymptote D dont on donnera une équation.

b. En admettant que la fonction x que l'on étudie soit solution du problème mécanique décrit au début de cet exercice, donner une interprétation du résultat obtenu au **B.l.a)**.

2. **a.** Déterminer la dérivée x' de x.

b. Établir le tableau de variation de x.

3. **a.** Déterminer la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Compléter, après l'avoir reproduit, le tableau de valeurs suivant dans lequel on fera figurer éventuellement des valeurs décimales approchées à 10^{-2} près.

t	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2
$x(t)$							

c. Construire D, T et $\mathcal{C}$.

Exemple d'équation différentielle non linéaire

$\boxed{\textbf{16.9}}$ *La vitesse du parachute (suite)*

Un parachutiste saute d'un avion. On suppose que son parachute s'ouvre immédiatement.

Sur l'ensemble homme et parachute, de masse totale m, s'exercent plusieurs forces :

- le poids de l'ensemble, mg où g est l'accélération de la pesanteur ;

- la résistance de l'air, $-kv^2$ où k est le coefficient strictement positif qui dépend de la voilure du parachute, et v^2 le carré de la vitesse ;
- la poussée d'Archimède de l'air qui sera considérée négligeable.

En écrivant la loi fondamentale de la dynamique pour le centre de gravité G de l'ensemble, on obtient l'équation différentielle $mv' = mg - kv^2$ où v est la fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0, +\infty[$ prenant pour valeur la norme du vecteur vitesse, et v' est la fonction dérivée de v.

En simplifiant, on obtient donc $v' = g - \frac{k}{m}v^2$. Dans la suite du problème, on prendra $g = 10$; $m = 70$ et $k = 28$ (en unités S.I.). L'équation différentielle sera donc :

$$v' = 10 - 0,4v^2 \quad (E)$$

Partie A

1. Démontrer que l'équation différentielle (E) peut s'écrire
$$\frac{v'}{25 - v^2} = 0.4$$
pour tout v de l'intervalle $[0, 5[$.
2. Déterminer deux nombres réels a et b tels que, tout v de l'intervalle $[0, 5[$,
$$\frac{1}{25 - v^2} = \frac{a}{5 + v} + \frac{b}{5 - v}.$$
3. Résoudre l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière v telle que $v(0) = 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{e^{4t} - 1}{e^{4t} + 1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f.
3. Quelle serait la limite de la vitesse $v(t)$ si t tendait vers $+\infty$.

16.10