Équations différentielles d'ordre 1

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- résoudre une équation différentielle du premier ordre ;
- appliquer la méthode de la variation de la constante.

14.1 Résoudre (ou intégrer) chacune des équations différentielles suivantes :

1. $2f'(t) - 3f(t) = 0$ (sur $\mathbf{R}$)
2. $y'(t) + 5y(t) = 0$ (sur $\mathbf{R}$)
3. $y'(t) - \dfrac{2}{t}y(t) = 0$ (sur $\mathbf{R}^{+*}$)
4. $tv' + (1-t)v = 0$ (sur $\mathbf{R}^{+*}$)
5. $(1+t^2)y' + ty = 0$ (sur $\mathbf{R}$)
6. $tx' - x = 0$ (sur $\mathbf{R}^{+*}$)
7. $(\sin t)x' + (\cos t)x = 0$ sur $I =]0;\pi[$
8. $(t-1)x' + x = 0$ sur $I =]0;1[$

14.2 On considère l'équation différentielle $3y' + 2y = 0 \quad (E)$

1. Résolvez (E) et tracez plusieurs solutions sur l'écran de votre calculatrice.
2. Résolvez cette même équation sachant maintenant que $y(0) = 32$.

14.3 Soit (E) $(1+t^2)x = t(1-t^2)x'$.

1. Trouver A, B et C tels que $\dfrac{1+t^2}{t(t^2-1)} = \dfrac{A}{t} + \dfrac{B}{t-1} + \dfrac{C}{1+t}$.
2. Résoudre (E) sur $]1;+\infty[$
3. Trouver la solution particulière x_1 telle que $x_1(2) = -\dfrac{2}{3}$.

14.4 *Décharge de condensateur*
Les unités de mesure utilisées sont les unités S.I.
Un condensateur de capacité C est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ; on note $a = RC$. La tension aux bornes du condensateur est une fonction V du temps t définie sur $[0,+\infty[$.
On admet que V est une fonction dérivable solution de l'équation différentielle :

$$V'(t) + \frac{1}{a}V(t) = 0. \quad (E)$$

1. **a.** Déterminer toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle (E).
   b. On rappelle que pour $t = 0$ on a $V(0) = 20$. Déterminer l'expression de V.
2. Dans cette question, on suppose que $R = 1000$ et $C = 10^{-4}$.
   a. Montrer que l'on a alors $V(t) = 20e^{-10t}$.
   b. Étudier les variations de la fonction V.
   c. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $V(t) \geqslant 0,02$.
   d. L'intensité traversant le circuit est une fonction I du temps ; on a $I(t) = CV'(t)$. Déterminer $I(t)$.

e. Calculer l'énergie W dissipée dans le résistor entre les instants $t = 0$ et $t = 0,69$ sachant que

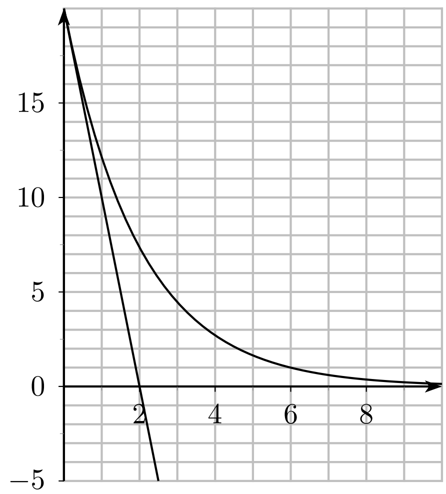
$$W = \int_0^{0.69} RI^2(t)\mathrm{d}t.$$

3. Dans cette question, la tension aux bornes étant définie par $V(t) = 20e^{-\frac{t}{a}}$, on note C_a la courbe représentative de V dans un repère orthogonal avec les unités graphiques 5 cm sur l'axe des abscisses pour 0,1 seconde et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées pour représenter 1 volt.

a. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe C_a au point d'abscisse 0.

b. Soit M le point d'intersection de T avec l'axe des abscisses. Déterminer l'abscisse de M.

c. Pour un certain dipôle on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$, ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0 sur le graphique ci-dessous. Déduire de ce graphique la valeur correspondante de a.



EDL du premier ordre avec second membre

14.5 Résoudre chacune des équations différentielles suivantes (on cherchera une solution particulière sous la forme indiquée) :

1. $x'(t) + 3x(t) = 4\sin t + \cos t$ (sous la forme $A\cos t + B\sin t$).

2. $x'(t) - 5x(t) = t$ (sous la forme $At + B$).

3. $x'(t) - 4x(t) = 2\mathrm{e}^{3t}$ (sous la forme $k\mathrm{e}^{3t}$).

14.6 *Écoulement d'un liquide dans un tube cylindrique*

Une comparaison à un modèle d'écoulement amène à considérer que la vitesse d'écoulement v_0 d'un liquide dans un tube cylindrique est solution de l'équation différentielle :

$$4v'(x) + v(x) = 3e^{\frac{x}{2}} - 1 \quad (E)$$

avec la condition initiale $v_0(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $4v'(x) + v(x) = 0$.

2. Déterminer les constantes réelles A et B pour que la fonction u telle que $u(x) = Ae^{\frac{x}{2}} + B$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. Résoudre l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière v_0 de l'équation différentielle (E) vérifiant $v_0(0) = 0$.

$\boxed{\textbf{14.7}}$ *Le bon polynôme*
Soit (E) l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = x^2 - x - 1$$

dans laquelle y est une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ de la variable réelle x et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous forme d'un polynôme de degré 2.

2. Trouver la solution générale de l'équation (E).

3. Quelle est la solution de (E) vérifiant la condition $y(0) = 1$?

$\boxed{\textbf{14.8}}$ *La vitesse d'un marteau*
Une machine à compacter est constituée d'un bloc d'acier appelé marteau. Ce marteau se déplace le long d'une tige placée verticalement.
L'étude physique montre que la vitesse v (exprimée en mètres/seconde) est une fonction du temps t (exprimé en secondes) solution de l'équation différentielle

$$v'(t) + v(t) = 5 + 5e^{-t} \quad (E)$$

où v est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ et v' sa fonction dérivée.

1. Résoudre $v'(t) + v(t) = 0$.

2. Déterminer une solution particulière de (E) de la forme $v_0(t) = a + bte^{-t}$ où a et b sont deux nombres réels à déterminer.

3. **a.** Résoudre (E).

b. En déduire $v(t)$ en supposant que $v(0) = 0$.

4. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre les instants $t = 0$ et $t = 2$, c'est à dire

$$\int_0^2 \left[(5t - 5)e^{-t} + 5\right] \mathrm{d}t.$$

Donner, en mètres, une valeur approchée de cette longueur au centième près.

$\boxed{\textbf{14.9}}$ *La vitesse d'un parachute*
La trajectoire suivie par un objet relié à un parachute est un axe vertical noté $(O; \vec{\imath})$. A un instant donné, le vecteur vitesse $\vec{V}$ de l'objet est défini par $\vec{V}(t) = v(t)\vec{\imath}$ où v est une fonction de la variable réelle t dans l'intervalle $[0; +\infty[$.
Dans les conditions de l'expérience, le vecteur $\vec{R}$ représentant la résistance de l'air est défini par $\vec{R} = -k\vec{V}$ où k est un nombre réel strictement positif.
On admet que la fonction v vérifie l'équation différentielle :

$$mv'(t) + kv(t) = mg \tag{1}$$

où m est la masse totale de l'objet et du parachute et g le coefficient de l'accélération de la pesanteur.

1. **a.** Montrer qu'il existe une fonction constante, solution particulière de (1).

b. Montrer que les fonctions solutions de (1) sont définies pour tout nombre réel positif t par :

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$$

où C est une constante réelle dépendant des conditions de l'expérience.

2. Dans la suite du problème on prendra $m = 8$ kg ; $g = 10\ m.s^{-2}$ et $k = 25$ unités S.I.

a. Donner la fonction particulière v_1, solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v_1(0)$ de 5 $m.s^{-1}$.

b. Donner la fonction particulière v_2 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale nulle.

c. Montrer que les fonctions v_1 et v_2 ont la même limite lorsque t tend vers $+\infty$.

d. Donner la fonction particulière v_3 solution de l'équation différentielle (1) correspondant à une vitesse initiale $v_3(0)$ de 3,2 $m.s^{-1}$.

e. Tracer soigneusement les courbes C_1, C_2 et C_3 représentant respectivement les fonctions v_1, v_2 et v_3 dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. On prendra pour unité graphique 2 cm sur l'axe vertical et et 4 cm sur l'axe horizontal.

14.10 Soit (E) : $y'(x) - y(x) = x^2$.

1. Résoudre (E)
2. Trouver la solution f de (E) vérifiant $f(0) = 0$.
3. Etudier f sur $\mathbf{R}^+$ et tracer sa représentation graphique. (On pourra étudier rapidement les variations de la fonction $g : x \mapsto e^x - (x+1)$ pour trouver le signe de f' sur $\mathbf{R}^+$.)

14.11 Soit (E) l'équation différentielle

$$2x'(t) + 3x(t) = 6t^2 - 7t - 7$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $\mathbf{R}$, et où x' est la fonction dérivée de x.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 0$.

Méthode de variation de la constante

14.12 En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre chacune des équations différentielles suivantes puis préciser pour chaque solution sur quel domaine elle est valable.

1. $x'(t) - x(t) = \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$
2. $tx'(t) - x(t) = \sqrt{t}$
3. $(t^2+1)x'(t) + 2tx(t) = 3t^2$
4. $y'(x)\cos x - y(x)\sin x = 2x - 1$

14.13 En utilisant la méthode de la variation de la constante, résoudre chacune des équations différentielles suivantes puis préciser pour chaque solution sur quel domaine elle est valable.

1. $ty'(t) - y(t) = t^2\mathrm{e}^t$
2. $(1-x^5)y'(x) - 5x^4y(x) = 1$
3. $xy' + y = \dfrac{1}{1+x^2}$
4. $xy' + (x-1)y = x^2$
5. $(x+1)^3y' + 2y(x+1)^2 = 1$

$\boxed{\textbf{14.14}}$ *Méthode de la variation de la constante*

Le but de l'activité est la résolution de l'équation différentielle (E) :

$$x(x^2+1)y' - 2y = x^3(x-1)^2e^{-x},$$

où y représente une fonction de la variable réelle x, dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et où y' est la fonction dérivée de y.

1. **a.** Déterminer les trois nombres réels a, b, c tels que pour tout réel x de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

b. En déduire une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction :

$$x \mapsto \frac{2}{x(x^2+1)}.$$

c. Résoudre sur l'intervalle $]0, +\infty[$ l'équation différentielle (E_1) :

$$x(x^2+1)y' - 2y = 0.$$

d. Pourquoi a-t-on préciser l'intervalle $]0, +\infty[$?

2. On se propose de déterminer une fonction g dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$ telle que la fonction :

$$h : x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}g(x)$$

soit une solution particulière de l'équation (E).

a. Calculer $h'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.

b. Montrer que $h(x)$ est solution de (E) si et seulement si

$$g'(x) = (x-1)^2e^{-x}.$$

c. Déterminer les nombres réels α, β, γ tels que la fonction $x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ soit une primitive sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la fonction :

$$x \mapsto (x-1)^2e^{-x}.$$

3. En déduire une solution particulière de l'équation (E) puis la solution générale de cette équation.

Équations différentielles d'ordre 1

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
-

14.15