pour le . . ./. . ./. . .

Devoir maison

Le but de cet exercice est d'appréhender la formule de Taylor.

Partie A – Cas d'un polynôme

On considère le polynôme P défini par $P(x) = 3x^2 + 4x - 2$.

1. **a.** Calculer la dérivée de P.

b. Calculer la dérivée deuxième, notée P'' ou $P^{(2)}$, de P.

c. Calculer la dérivée troisième, notée P''' ou $P^{(3)}$, de P.

d. Que peut-on dire de $P^{(n)}$, pour tout entier n supérieur à 3.

2. **a.** Calculer $P(0)$, $P'(0)$ $P''(0)$ et $P^{(3)}(0)$.

b. En déduire la valeur de l'expression $P(0) + \dfrac{P'(0)}{1!}x + \dfrac{P''(0)}{2!}x^2$.

c. Déterminer de même la valeur de l'expression

$$P(1) + \frac{P'(1)}{1!}(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

d. Plus généralement, déterminer la valeur de l'expression

$$P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

Partie B – Cas de la fonction sinus

On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \sin(x)$.

1. **a.** Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ $\cdots$, $f^{(7)}(x)$.

b. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ $\cdots$, $f^{(7)}(0)$.

c. En déduire l'expression du polynôme $Q(x)$ défini par

$$Q(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}(x-0)^7.$$

d. A la calculatrice, tracer les courbes de f et de Q. Que constate-t-on ?

2. **a.** Calculer $f(\frac{\pi}{2})$, $f'(\frac{\pi}{2})$, $f''(\frac{\pi}{2})$, $f^{(3)}(\frac{\pi}{2})$ $\cdots$, $f^{(7)}(\frac{\pi}{2})$.

b. En déduire l'expression du polynôme $R(x)$ défini par

$$R(x) = f(\frac{\pi}{2}) + \frac{f'(\frac{\pi}{2})}{1!}(x-\frac{\pi}{2}) + \frac{f''(\frac{\pi}{2})}{2!}(x-\frac{\pi}{2})^2 + \cdots + \frac{f^{(7)}(\frac{\pi}{2})}{7!}(x-\frac{\pi}{2})^7.$$

c. A la calculatrice, tracer les courbes de f et de R. Que constate-t-on ?

Partie C – Cas de la fonction exponentielle

On considère désormais la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ $\cdots$, $f^{(7)}(x)$.

2. Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ $\cdots$, $f^{(7)}(0)$.

3. En déduire l'expression du polynôme $S(x)$ défini par

$$S(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}(x-0)^7.$$

4. A la calculatrice, tracer les courbes de f et de S. Que constate-t-on ?

Développement limité

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- déterminer le developpement limité d'une fonction.

12.1 *Changement d'échelle*
Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

1. e^{2x}
2. $\dfrac{1}{1+(2t)^2}$
3. $\ln(1+\frac{t}{2})$
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}} = (1+2x)^{\frac{-1}{2}}$

12.2 Donner le développement limité à l'ordre indiqué au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

1. $\ln(1+x)+\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre 8.
2. $\sin(t)+\cos(t)-t$ à l'ordre 8.
3. $\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}+\ln(1+t)$ à l'ordre 4.

12.3 *Où on retrouve des formules connues.*

1. Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de e^t et celui de e^{-t}.
2. En déduire le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$.
3. Si on remplace t par l'imaginaire pur ix, quel développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 retrouve-t-on ?

12.4 *Deux méthodes pour le même résultat.*

1. Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+x}$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1-x}$.
3. En déduire le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de :
   a. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$.
   b. $\dfrac{2}{1-x^2}$.
4. Pourquoi les résultats obtenus ne sont pas surprenant ?

12.5 Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de chacune des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{t}{1+3t}$
2. $x^2\sqrt{1+x}$
3. $e^x\sin(x)$
4. $\dfrac{1+x}{1-x}$
5. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$
6. $(x+1)e^{-x}$

12.6 *Deux méthodes pour le même résultat.*

1. En utilisant le produit des développements limités, déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \sin(x)\cos(x)$.
2. a. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \sin(2x)$.

   b. En utilisant la propriété $\sin(x)\cos(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$, retrouver le résultat de la question 1.

12.7 On considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbf{R}$:

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$

1. Ecrire un développement limité, au voisinage de 0, à l'ordre 5 de $ch(x)$ puis de $sh(x)$.
2. Démontrer que le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $th(x)$ est

$$th(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\mapsto 0} \epsilon(x) = 0$$

Remarque : la fonction ch est appellée **cosinus hyperbolique** , sh est appellée **sinus hyperbolique** et th est appellée **tangente hyperbolique** .

12.8 Arctan

1. Donner le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 de $\arctan(x)$.

12.9 Arcsin

1. Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
2. En déduire celui de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. En déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $\arcsin(x)$.

12.10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f.

12.11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer une primitive de f.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de 0 de f.

Développement limité

> A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
> • utiliser un developpement limité pour calculer une limite, une tangente.

12.12 A l'aide des développements limités, déterminer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$
3. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x}$
4. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

12.13 A l'aide des développements limités déterminer chacune des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

12.14 On considère les courbes d'équation $\mathscr{C}_1 : y = \dfrac{1}{1-x^2}$ et $\mathscr{C}_2 : y = x^2+1$.
Montrer, en utilisant un développement limité, que ces courbes sont tangentes l'une à l'autre au point $A(0;1)$. Étudier leur position relative.

12.15 On considère les courbes d'équation $\mathscr{C}_1 : y = x\ln(1-x)$ et $\mathscr{C}_2 : y = -x^2$.
Montrer que ces courbes sont tangentes au point O et étudier leur position relative.

12.16 On considère la fonction f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par $f(x) = (-x-2)e^{-x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère donné.

1. Montrer que la fonction f est croissante sur I.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.
3. Ecrire le développement limité d'ordre 3 en 0 de e^{-x} puis celui de f.
4. En déduire une équation de la tangente T, à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, et la position relative de T et $\mathscr{C}$ au voisinage de ce point.

12.17 On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(3x)$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses pour $\dfrac{\pi}{3}$ et 3 cm sur l'axe des ordonnées).

1. **a.** Montrer que le développement limité d'ordre 2 en 0 de f est :

$$1 - x - 4x^2 + x^2\epsilon(x) \text{ où } \lim_{x \mapsto 0} \epsilon(x) = 0$$

   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   c. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et T.

2. Construire sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{3}; +\frac{\pi}{3}]$ la courbe $\mathscr{C}$ et T.

3. **a.** Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$.

b. En faisant une double intégration par parties, montrer que l'on a

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{10}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}} + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}}\right)$$

c. Déterminer l'aire en cm^2 de la partie du plan limité par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{6}$.