Primitives et Intégrales

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- Calculer une intégrale de fonctions polynomes, exponentielles ou trigonométriques.

8.1 Calculer la valeur de chacune des intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-3}^{2} (x-1)\mathrm{d}x.$ $\quad I_2 = \int_{-1}^{3} (x+1)\mathrm{d}x.$ $\quad I_3 = \int_{0}^{2} (3x^2+5x-4)\mathrm{d}x.$

$I_4 = \int_{1}^{\frac{5}{2}} (2x^2-6x+7)\mathrm{d}x.$ $\quad I_5 = \int_{2}^{3} (x+\frac{1}{x})\mathrm{d}x.$ $\quad I_6 = \int_{1}^{3} (x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x.$

$I_7 = \int_{1}^{2} \frac{2}{2x+1}\mathrm{d}x.$ $\quad I_8 = \int_{-4}^{1} \frac{4}{-x+3}\mathrm{d}x.$ $\quad I_9 = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

$I_{10} = \int_{1}^{e} \frac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x.$ $\quad I_{11} = \int_{-1}^{1} (2e^x+1)\mathrm{d}x.$ $\quad I_{12} = \int_{0}^{1} [(2x+1)e^{x^2+x}]\mathrm{d}x.$

$I_{13} = \int_{1}^{3} \frac{5}{x^2+1}\mathrm{d}x.$ $\quad I_{14} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3x + 2\cos 2x)\mathrm{d}x.$ $\quad I_{15} = \int_{0}^{1} -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

8.2 Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction à intégrer puis calculer l'intégrale donnée.

1. $\int_{1}^{2} \frac{xe^x-2}{x}\,\mathrm{d}x.$
2. $\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.$
3. $\int_{1}^{e} \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,\mathrm{d}x.$
4. $\int_{0}^{1} \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t.$

8.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{1}{4}(2x\sin 2x + \cos 2x)$

1. Montrer que $f'(x) = x\cos 2x$.

On considère les intégrales suivantes $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\cos^2 x\mathrm{d}x$ et $J = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} x\sin^2 x\mathrm{d}x$

2. En utilisant des formules trigonométriques, calculer $I+J$ et $I-J$.
3. En déduire I et J.

8.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{3x}$

1. Déterminer une primitive de f sous la forme $(ax+b)\mathrm{e}^{3x}$
2. En déduire la valeur de $I = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$

8.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = (\cos(2x)+\sin(2x))\mathrm{e}^{3x}$

1. Déterminer une primitive de f sous la forme $[A\cos(2x)+B\sin(2x)]\,\mathrm{e}^{3x}$
2. En déduire la valeur de $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$

Fonctions d'une variable réelle

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- Calculer un volume, une aire, une valeur moyenne par le biais d'une intégrale.

8.6 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0;\pi]$ par $f(x) = \sin x$.

1. Tracer la courbe représentative de f dans un plan muni d'un repère orthonormal(unité graphique : 2 cm).
2. Calculer l'aire, en cm^2, de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$.

8.7 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x - 2 + 2e^{-x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Étudier les variations de f. Préciser les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$ et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $(\mathscr{D})$.
3. Tracer $\mathscr{C}$ et $(\mathscr{D})$.
4. Soit b un réel tel que $b > 2$. Calculer, en cm^2, l'aire $\mathscr{A}(b)$ de la partie du plan délimitée par les droites d'équation $x = 0$, $x = b$, la droite $(\mathscr{D})$et la courbe $\mathscr{C}$.

8.8 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$

1. Étudier ses variations et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal(unité graphique : 2 cm).
2. Calculer l'aire, en cm^2, de l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3} \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$
3. Donner la valeur arrondie au mm^2 près de cette aire.

8.9 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;2]$ par $f(x) = x^2 - x + 2$.
On note ξ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$
Calculer le volume, en unité de volume, du solide engendré par la rotation de ξ autour de l'axe des abcsisses.

8.10 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;3]$ par $f(x) = (x-3)e^x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Étudier les variations de f et tracer la courbe $\mathscr{C}$.
2. Soit ξ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ f(x) \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$
   - **a.** Déterminer les réels α et β de façon que la fonction F définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = (\alpha x + \beta)e^x$ soit une primitive de f sur $\mathbf{R}$.
   - **b.** Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, de l'ensemble ξ.
   - **c.** Donner la valeur en cm^2 de cette aire.

3. On se propose de calculer le volume $\mathscr{V}$ de ce solide engendré par ξ en tournant autour de l'axe des abscisses.

a. Déterminer les nombres réels a, b et c de façon que la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction f^2 sur $\mathbf{R}$.

b. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée en cm^3, du volume $\mathscr{V}$ du solide engendré par ξ en tournant autour de l'axe des abscisses.

8.11 Calculer les valeurs moyennes de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^3$ sur $[0; 1]$

2. $g(x) = 1 + \sin \omega t$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{\omega}\right]$

3. $h(x) = \cos 4t + 2\cos 2t$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

4. $i(x) = \cos^2 x$ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$

8.12 Soit la fonction i de la variable t définie sur $\left[0; \dfrac{1}{5}\right]$ par $i(t) = \sin(10\pi t)$.

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction i sur l'intervalle $[0; 10]$

2. Calculer la valeur efficace de la fonction i.

8.13 Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction f définie par $f(x) = 1 + \sin 2x$ sur $[0; \pi]$.