Fonctions réciproques

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- Justifier si une fonction admet une réciproque ou non ;
- Tracer la courbe réciproque d'une fonction ;
- Déterminer l'expression de la réciproque d'une fonction ;

6.1 Soit f la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

1. Tracer la courbe de f dans un repère orthonormal.
2. Donner le plus grand intervalle sur lequel f admette une fonction réciproque. Quel est l'ensemble de définition de f^{-1} ?
3. Tracer sur l'intervalle déterminé, la représentation graphique de f^{-1}, fonction réciproque de f.

6.2 Pour tout $x>0$, on pose $f(x)=4+\ln x-2x^2$.

1. Étudier les variations de f.
2. f admet-elle une fonction réciproque sur $]0;+\infty[$? Justifier.
3. Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur $]0\ ;\ \frac{1}{2}]$.
4. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution. (Indiquer les étapes).

6.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\mathrm{e}^{x^2-1}$.

1. Etudier les variations de f.
2. Tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
3. f admet-elle une fonction réciproque sur $\mathbf{R}$? justifier.
4. Trouver un intervalle où f admette une fonction réciproque notée f^{-1}.
5. Tracer sur le même graphique la courbe de f^{-1} et exprimer $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

6.4 Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}_f=\mathbf{R}-\{5\}$ par $f(x)=\dfrac{x+1}{x-5}$.

1. Montrer que f réalise des bijections que l'on précisera.
2. Déterminer la fonction réciproque de f.
3. f réalise-t-elle une bijection de $\mathscr{D}_f=\mathbf{R}-\{5\}$ sur $]1;+\infty[$? Justifier.

6.5 On considère la fonction définie par $f(x)=\ln(1-\ln x)$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que f est une bijection de $\mathscr{D}_f$ sur une partie de $\mathbf{R}$ que l'on déterminera.
4. Expliciter l'application réciproque de f.

6.6 On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

2. Étudier les variations de f.
3. Donner les limites de f aux bornes de son intervalle.
4. Donner le plus grand intervalle sur lequel f admette une fonction réciproque.
5. Tracer sur l'intervalle déterminé, la représentation graphique de f^{-1}, fonction réciproque de f.

Fonctions circulaires réciproques

A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- Tracer les fonctions $\arccos$, $\arcsin$ et $\arctan$;
- Déterminer l'image d'un nombre par les fonctions $\arccos$, $\arcsin$ et $\arctan$;
- Dériver les fonctions $\arccos$, $\arcsin$ et $\arctan$.

6.7 Attention à ne pas aller trop vite dans les réponses !

1. Calculer $\sin(\arcsin x)$ pour $x = \dfrac{1}{2}$, pour $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, pour $x = 2$.
2. Calculer $\arcsin(\sin x)$ pour $x = -\dfrac{\pi}{3}$, pour $x = \dfrac{3\pi}{4}$, pour $x = \dfrac{7\pi}{4}$.
3. **a.** A-t'on $\sin(\arcsin x) = x$ pour tout réel x ?

   b. A-t'on $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout réel x ?

6.8 On veut montrer que pour tout x de $[-1; 1]$, on a $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

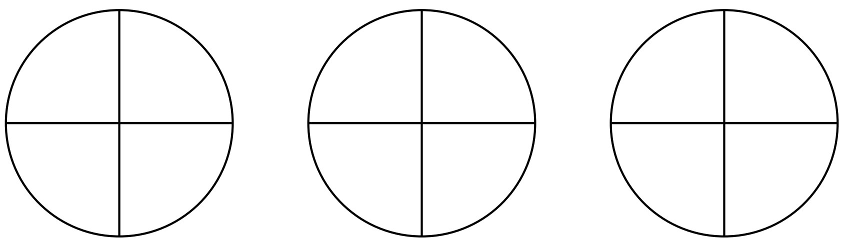
1. Exprimer $\cos y$ en fonction de $\sin^2 y$.
2. En déduire l'expression de $\cos(\arcsin x)$.
3. En déduire que pour tout x de $[-1; 1]$, on a $\tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6.9 En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, montrer que $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ et en déduire que $\tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

6.10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est périodique de période 2π.
3. Etude de f sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.

   a. Pour chacune des figures suivantes, placer un angle x appartenant l'intervalle donné puis la valeur de $\sin x$ correspondante et enfin celle de $\arcsin(\sin x)$.



$x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$ $x \in [-\pi; -\frac{\pi}{2}]$

   b. En déduire l'expression de $\arcsin(\sin x)$ en fonction de x sur chacun des intervalles donnés.

4. Déduire de la question précédente le tracé de f sur $[-\pi; +\pi]$
5. En déduire le tracé de la courbe de f sur $\mathbf{R}$.

6. f est-elle continue sur $[-\pi;+\pi]$? sur $\mathbf{R}$?

6.11 on considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$.

1. On pose $x=\cos a$ avec $a\in[0;\pi]$. Montrer que $f(x)=\arcsin(\sin 2a)$.
2. Donner suivant les valeurs de a, l'expression de f.
3. En déduire l'expression de f suivant les valeurs de x dans $[-1,1]$.
4. Construire la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthogonal d'unité 4 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

6.12 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

1. $x\arccos x$
2. $\arctan(2x)$
3. $\arctan(x^2)$
4. $x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
5. $\arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

6.13 Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\arcsin x+\arccos x$.

1. Calculer la dérivée de f sur $]-1;1[$.
2. Calculer $f(0)$.
3. **a.** Montrer que pour tout x de $]-1;1[$, on a $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

   b. Montrer que pour tout x de $[-1;1]$, on a $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

6.14 Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=\arcsin(x^2)$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Tracer la représentation graphique de f.

6.15 Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}-\arctan x$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal (unités : 1,5 cm en abscisse et 3 cm en ordonnée).

1. Déterminer la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$.
2. Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x)=\dfrac{1-3x^2}{(x^2+1)^2}$.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 0.
5. Soit ϕ la fonction numérique défine sur $\mathbf{R}$ par $\phi(x)=x-f(x)$. Étudier les variations de la fonction ϕ (les limites ne sont pas demandées). Calculer $\phi(0)$. Donner le signe de $\phi(x)$. En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente (T).

pour le .../.../...

Devoir maison

$\boxed{1}$ *Fonctions réciproques circulaires*

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(\arccos x)$.

- **a.** Donner et justifier le domaine de définition, noté $\mathscr{D}_f$ de f.
- **b.** En utilisant un cercle trigonométrique pour votre résultat, donner l'expression de $\cos(\arccos x)$ en fonction de x sur $\mathscr{D}_f$.
- **c.** Tracé la courbe de f sur $\mathscr{D}_f$.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \arccos(\cos x)$.

- **a.** Donner et justifier le domaine de définition de g.
- **b.** Montrer que f est périodique de période 2π.
- **c.** En utilisant un cercle trigonométrique pour justifier votre résultat, donner l'expression de $\arccos(\cos x)$ en fonction de x sur $[0;\pi]$.
- **d.** Faire de même pour l'intervalle $[-\pi;0]$.
- **e.** Déduire de la question précédente le tracé de g sur $[-\pi;+\pi]$
- **f.** En déduire le tracé de la courbe de g sur $\mathbf{R}$.

$\boxed{2}$ *Étude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par

$$f(x) = x \arccos x.$$

1. Déterminer la fonction dérivée première f' de la fonction f sur $]-1;1[$.

2. Si f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur $]-1;1[$, montrer que l'on a

$$f''(x) = \frac{x^2-2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Etudier le signe de f'' et en déduire le tableau de variation de f'.

4. Démontrer que la fonction f' s'annule pour une unique valeur α sur $]0;1[$.

5. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (On indiquera les étapes dans un tableau).

6. Déduire[1] de l'étude précédente les variations de la fonction f et montrer que f admet un extremum égal à :

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

1. Indication : On utilisera l'égalité $f'(\alpha) = 0$ pour obtenir une expression de $\arccos\alpha$ en fonction de α.

pour le .../.../...

Devoir maison

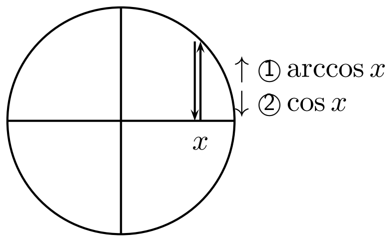
$\boxed{3}$ *Fonctions réciproques circulaires*

1. *Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(\arccos x)$.*

a. Par définition, $\arccos x$ est définie de $[-1;1]$ sur $[0;\pi]$. Comme $\cos x$ est définie sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur $[0;\pi]$, la fonction f est définie sur $[-1;1]$.

b. $\arccos x$ envoie le segment $[-1;1]$ de l'axe des abscisses sur le demi-cercle supérieur. $\cos x$ envoie le demi-cercle supérieur sur le segment $[-1;1]$ de l'axe des abscisses. On a donc

$$\forall x \in [-1;1]\, \arccos(\cos x) = x.$$



c. Il suffit de tracer $y = x$ pour x variant de -1 à 1.

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = \arccos(\cos x)$.

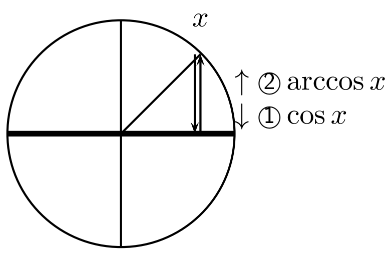
a. *Donner et justifier le domaine de définition de g.*
$\cos x$ est définie de $\mathbf{R}$ sur $[-1;1]$, donc l'intervalle d'arrivée de $\cos x$ correspond à l'intervalle de départ de $\arccos x$.La fonction est définie sur $\mathbf{R}$.

b. *Montrer que f est périodique de période 2π.*
$f(x+2\pi) = \arccos(\cos(x+2\pi)) = \arccos(\cos(x)) = f(x)$ donc f est bien 2π-périodique.

c. *En utilisant un cercle trigonométrique pour justifier votre résultat, donner l'expression de $\arccos(\cos x)$ en fonction de x sur $[0;\pi]$.*

Si $x \in [0;\pi]$ alors $\cos(x)$ envoie le demi cercle supérieur sur le segment $[-1;1]$ et $\arccos x$ retourne ce segment sur le demi cercle supérieur. donc

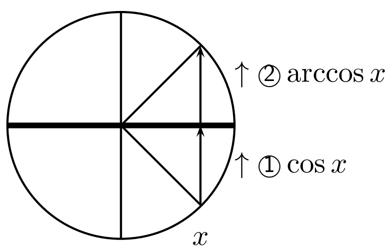
$$\forall x \in [0;\pi]; \arccos(\cos x) = x$$



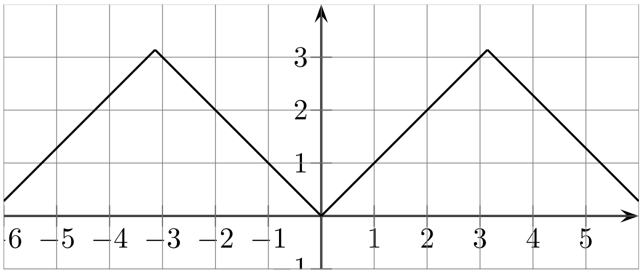
d. *Faire de même pour l'intervalle $[-\pi;0]$.*

Si $x \in [-\pi;0]$ alors $\cos(x)$ envoie le demi cercle inférieur sur le segment $[-1;1]$ et $\arccos x$ retourne ce segment sur le demi-cercle supérieur. donc

$$\forall x \in [0;\pi]; \arccos(\cos x) = -x$$



e. *Déduire de la question précédente le tracé de g sur $[-\pi;+\pi]$*
On trace la fonction $y = x$ sur $[0;\pi]$ puis la fonction $y = -x$ sur $[-\pi;0]$. La fonction étant 2π-périodique, on effectue ensuite les translations pour obtenir la courbe sur $\mathbf{R}$ entier.



$\boxed{4}$ *Étude d'une fonction*
On considère la fonction f définie sur $[-1;1]$ par

$$f(x) = x \arccos x.$$

1. *Déterminer la fonction dérivée première f' de la fonction f sur $]-1;1[$.*
f est de la forme $u(x) \times v(x)$ avec :
$u(x) = x \quad ; \quad u'(x) = 1$ et $v(x) = \arccos x \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Comme $(u \times v)' = u'v + v'u$, on obtient

$$f'(x) = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. *Si f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur $]-1;1[$, montrer que l'on a*

$$f''(x) = \frac{x^2-2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Commençons par calculer la dérivée de $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
g est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec :
$u(x) = x \quad ; \quad u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{1-x^2} \quad ; \quad v'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$
Comme $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1 \times \sqrt{1-x^2} - x \times \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1-x^2}^2} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}+x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
&= \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (\arccos x)' - g'(x) \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \\
&= \frac{-1+x^2-1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \\
&= \frac{x^2-2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}
\end{aligned}$$

3. *Etudier le signe de f'' et en déduire le tableau de variation de f'.*
$\sqrt{1-x^2}$ positif sur $[-1;1]$ puisque c'est une racine carrée.
$1-x^2 = (1-x)(1+x)$ est positif sur $[-1;1]$.
$x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ est négatif sur $[-1;1]$.

x	-1		1
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	

4. *Démontrer que la fonction f' s'annule pour une unique valeur α sur $]0;1[$.*

$$\left.\begin{array}{l}
f' \text{ est continue car composée de fonctions continues.} \\
\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty < 0 \\
f'(0) = \arccos(0) - \dfrac{0}{\sqrt{1}} = \dfrac{\pi}{2} > 0
\end{array}\right\} \text{donc d'après le théorème des valeurs}$$

intermédiaires, f' s'annule au moins une fois entre 0 et 1.
f' étant stictement décroissante, cette solution est unique.

5. *Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près. (On indiquera les étapes dans un tableau).*
On procède par dichotomie et on obtient que $0,65 \leqslant \alpha \leqslant 0,66$.

a	$f(a)$
0	$1,57$

b	$f(b)$
1	$-\infty$

$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$
$0,5$	$0,47$
$0,75$	$-0,41$
$0,63$	$0,078$
$0,69$	$-0,14$
$0,66$	$-0,028$
$0,65$	$0,007$

$\ldots \leqslant \alpha \leqslant \ldots$
$0,5 \leqslant \alpha \leqslant 1$
$0,5 \leqslant \alpha \leqslant 0,75$
$0,63 \leqslant \alpha \leqslant 0,75$
$0,63 \leqslant \alpha \leqslant 0,69$
$0,63 \leqslant \alpha \leqslant 0,66$
$0,65 \leqslant \alpha \leqslant 0,66$

6. *Déduire*[2] *de l'étude précédente les variations de la fonction f et montrer que f admet un extremum égal à :*

$$\frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

2. Indication : On utilisera l'égalité $f'(\alpha) = 0$ pour obtenir une expression de $\arccos\alpha$ en fonction de α.

$f'(\alpha) = 0$ et f' est décroissante. On en déduit le signe de f' et le tableau de variation de f.

x	-1		α		1 α
$f'(x)$		$\searrow$			0
$f'(x)$		$+$	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

f admet un extremum en α car f' s'annule et change de signe en ce point.
$f(\alpha) = \alpha \arccos \alpha$. Comme $f'(\alpha) = 0$, on en déduit que $\arccos \alpha - \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} = 0$ d'où $\arccos \alpha = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ et donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}$.