Fonctions d'une variable réelle

À la fin de ce td, vous devez être capable de :
- connaître les fonctions de référence (polynômes, rationnelles, exponentielle, logarithme, trigonométrique)
- savoir dériver une fonction et en déduire ses variations ;
- savoir calculer des limites et en déduire des asymptôtes ;

2.1 Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$ et dont le tableau de variation est :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

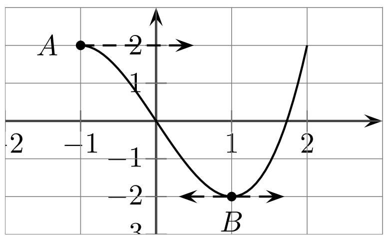
1. A l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes :
   a. Quelles sont les limites de f en 0 et $+\infty$?
   b. Préciser le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$.
   c. La fonction f admet-elle un extremum sur $]0;+\infty[$? Si oui, pour quelle valeur de x ?
   d. Quel est le signe de f sur $]0;+\infty[$?
2. On sait que la fonction f est l'une des quatre fonctions suivantes, définies sur $]0;+\infty[$:

$$f_1(x) = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = 2 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$f_2(x) = -(\ln x)^2 - 1 \qquad f_4(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$$

   a. Calculer $f_1(1)$.
   b. Déterminer le signe de $f_2(x)$ sur $]0;+\infty[$.
   c. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f_3(x)$.
   d. Que peut-on conclure des résultats des questions précédentes ?

2.2 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1;2]$ dont on donne la courbe représentative sur la figure.
On précise qu'au point $A(-1;2)$ et $B(1,-2)$ la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Utiliser le graphique pour déterminer les nombres $f(0)$, $f(1)$, $f'(1)$.
2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1;2]$.
4. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax^3 + bx + c$.
   À l'aide des valeurs mises en évidence à la question 1, calculer les trois coefficients réels a, b, et c.
5. Utiliser l'expression de $f(x)$ obtenue à la question précédente pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. Vérifier les résultats sur le graphique.

2.3 Dériver chacune des expressions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{4x+5}{-x+2}$.
2. $g(x) = (6x+3)^5$.
3. $h(x) = \cos(2x+5) + \dfrac{1}{x^5}$.
4. $i(x) = \ln\left((3x+2)^5\right)$.
5. $j(x) = (x^2+3x+1)\mathrm{e}^{2x}$.
6. $k(x) = \ln(\sqrt{x+3})$.

2.4 On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

1. **a.** Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
   b. Expliquer l'intervalle de définition de f.
2. **a.** Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   b. Quelle(s) asymptote(s) peut-on en déduire pour la courbe ?
3. **a.** Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   b. Etudier le signe de f'.
   c. En déduire le tableau de variation de f.
4. Justifier que la fonction f admet un extremum. Préciser le.
5. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

2.5 Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 3\ln x + 2$.

1. **a.** Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.(On ne demande pas la valeur des limites en 0 et $+\infty$).
2. Calculer une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. **a.** Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation d'inconnue X : $X^2 - 3X + 2 = 0$.
   b. En déduire les solutions exactes dans $]0\ ;\ +\infty[$ de l'équation $f(x) = 0$.
   c. Déduire, des questions précédentes, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2.6 On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = -\mathrm{e}^{2x} + x + 3$.
On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

1. **a.** Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Étudier la limite de la fonction f en $-\infty$.
   c. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 3$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ en $-\infty$.
   d. Étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite Δ.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout nombre réel x.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f. (Donner la valeur exacte de son maximum.)

Fonctions d'une variable réelle

À la fin de ce td, vous devez être capable de :
- utiliser un logiciel de calcul formel pour étudier une fonction.

Xcas[1] est un logiciel libre de calcul formel. Les principales instructions concernant les fonctions sont présentées ci-dessous.
Voir l'aide de ce logiciel pour plus de précisions sur chacune d'elles.

Définition mathématique	Saisie dans Xcas	Résultat affiché
Définir une fonction	f(x) :=2x^2-5x+1	$x \mapsto 2x^2 - 5x + 1$
$f(x) = e^x$	f(x) :=exp(x)	$x \mapsto \exp(x)$
$g(x) = \ln(x)$	g(x) :=ln(x)	$x \mapsto \ln(x)$
$h(x) = \log_{10}(x)$	h(x) :=log10(x)	$x \mapsto \ln(x)$
L'image de 2 par f	f(2)	-1
Tracer une fonction	graphe(f(x),x=0..5)	
Développer	developper((x+3)*(x-1)^2)	$x^3 + x^2 - 5x + 3$
Réduire ...	simplifier(2x-5x^2+4x*(x+1))	$-x^2 + 6x$
Factoriser	factoriser(x^2-x-6)	$(x - 3)(x + 2)$
Forme canonique	forme_canonique(x^2+x+1)	$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$
Résoudre une équation	resoudre(2x^2-3x=2x-3,x)	1 et $\frac{3}{2}$
Résoudre une inéquation	resoudre(x^2-1>0)	$x < (-1)$ ou $x > 1$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-4}{x+5}$	limite((2x-4)/(x+5),x,+infinity)	2
$\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x > -5}} \dfrac{2x-4}{x+5}$	limite((2x-4)/(x+5),x,-5,1)	$-\infty$
$\lim\limits_{\substack{x \to -5 \\ x < -5}} \dfrac{2x-4}{x+5}$	limite((2x-4)/(x+5),x,-5,-1)	$+\infty$
Dériver une fonction	derive(x^2+x+1+cos(x),x)	$2x + 1 - \sin(x)$
Une primitive de ln	F(x) :=integrer(ln(x),x)	$x\ln(x) - x$
$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$	integrer(1/x,x,1,2)	$\ln(2)$

1. Téléchargement sur http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/irem.html

Applications

On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) := -x^3 - 4x^2 - x + 6$

Partie A – Quelques opérations sur f

1. Définir la fonction f par $f(x) = -x^3 - 4x^2 - x + 6$.
2. Calculer $f(6)$; $f(\frac{3}{7})$; $f(\sqrt{5})$.
3. Factoriser f.
4. Résoudre $f(x) = 0$.

Partie B – Étude de la courbe de f

1. Déterminer les coordonées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axes des ordonnées.
2. Déterminer les coordonées des points d'intersection de la courbe de f avec l'axes des abscisses.
3. Tracer la fonction f sur $[-3; 3]$ et vérifier les résultats précédents.

Partie C – Étude des variations

1. Dériver $f(x)$.
2. Résoudre $f'(x) > 0$ et en déduire le tableau de variations de f.
3. Calculer la limite de f en $+\infty$.
4. Calculer $\lim_{x \mapsto -\infty} f(x)$.
5. Calculer une primitive de f.
6. Caculer $\int_{-1}^{2} f(x)\mathrm{d}x$.

pour le .../.../...

Devoir maison

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x \ln x + \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unités graphiques 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

Partie A – Étude aux bornes de l'intervalle

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. **a.** Montrer que pour tout nombre réel strictement positif x, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(x\ln x + 1)$.
On rappelle que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$. En déduire la limite de f en 0.

b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ dont on donnera une équation.

Partie B – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par

$$g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

1. **a.** On désigne par g' la dérivée de la fonction g.
Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$.

b. Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$. L'étude des limites n'est pas demandée.

2. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$.

b. Donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

3. Déduire des questions B_1 et B_2 le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

Partie C – Variations de f et courbe associée

1. **a.** f' désignant la dérivée de f, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^x g(x)$, pour tout nombre x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

2. **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f.

b. Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près de $f(\alpha)$, en prenant $0,6$ pour valeur approchée de α.

3. **a.** Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5
$f(x)$ à 10^{-1} près										

b. Construire l'asymptote $\mathcal{D}$ et la courbe $\mathscr{C}$ pour x appartenant à l'intervalle $]\,0\,;\,2,5\,]$.