Fonctions d'une variable réelle
Exercices complémentaires

$\boxed{1}$ *Fonctions composées*

1. Rappeller les formules de dérivation des fonctions composées.
2. En déduire les fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad g(x) = \cos x \sin^2 x \quad ; \quad h(x) = \sqrt{(1+2x)^3}$$

   On simplifiera les expressions, notamment l'espression g' dans laquelle ne doit figurer que des $\sin x$.

$\boxed{2}$ *Etude de fonction*

On appelle f la fonction définie sur $\mathbf{R} - \{-2; 1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x+9}{x^2+x-2}$.

1. Déterminer les réels a et b tels que l'on ait pour tout x, $f(x) = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+2}$.
2. (a) Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Etudier les limites de f en -2^- et -2^+.
   (c) Etudier les limites de f en 1^- et 1^+.
   (d) Préciser toutes les asymptotes que l'on peut déduire des questions précédentes.
3. Montrer que la dérivée f' de f est définie par $f'(x) = \dfrac{-3x^2-18x-15}{(x^2+x-2)^2}$.
4. En déduire les variations de f.
5. On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.
   (a) Préciser les cordonnées du point A, intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses et celle du point B, intersection de $\mathscr{C}$ et de l'axe des ordonnées.
   (b) Donner une équation des tangentes respectives à $\mathscr{C}$ en A et en B.
   (c) Tracer $\mathscr{C}$ en faisant figurer les éléments obtenus au cours de l'étude.

$\boxed{3}$ On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{I} = \Big] -1; +\infty \Big[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+2x+18}{x+1}$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1. Étude des limites.
   (a) Déterminer la limite de f en -1.
   (b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (c) Quelle(s) asymtpote(s) peut-on déduire de ces limites ?

2. Étude de l'asymptote oblique.
   (a) Déterminer les nombres réels a, b et c, tels que, pour tout x de l'intervalle $\mathcal{I}$,
   $$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
   (b) Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
   (c) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ pour x variant dans $\Big]-1;+\infty\Big[$.
3. Étude des variations.
   (a) Calculer la dérivée f' de la fonction f et montrer que pour tout x de $\Big]-1;+\infty\Big[$,
   $$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$$
   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $\Big]-1;+\infty\Big[$.
4. Tracé de la courbe.
   Dans un repère, placer les éléments caractéristiques obtenus pour $(\mathscr{C})$ puis tracer à main levée une allure de cette courbe.