Fiches méthodes

Calcul de dérivées

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
k	1
x^n	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Fonction	Dérivée
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Opérations et dérivées :

Opération	Fonction	Dérivée
Addition	$u+v$	$u'+v'$
Multiplication par un nombre	$k \times u$ avec $k \in \mathbf{R}$	$k \times u'$
Multiplication	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$
Division	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
Composition	$f(u)$	$f'(u) \times u'$

Quelques dérivées classiques de fonctions composées :

$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)' = -u' \sin(u)$	$\sin(u)' = u' \cos(u)$
$(e^u)' = u'e^u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Exercice 1 : Dériver chacune des fonctions suivantes :

1. $a(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 3$.
2. $b(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{5}{x^3}$.
3. $c(x) = (2x+3) \times \cos x$.
4. $d(x) = \dfrac{3x+2}{x^2+4}$.
5. $e(x) = (3x+1)^5$
6. $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^3}$
7. $g(x) = \cos(7x+2)$
8. $h(x) = \sqrt{3x^2+1}$
9. $i(x) = \mathrm{e}^{x^2+3}$
10. $j(x) = \ln(\cos(x))$

Solution 1 :

1. a est une somme. On dérive chacun des termes de la fonction f.
   $a'(x) = 3x^2 + 5 \times (2x) + 6 \times 1 + 0 = 3x^2 + 10x + 6$.
2. On réécrit la fonction b sous une forme plus classique.
   $$b(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x^3} = x^{-2} + 5x^{-3}.$$
   On dérive chacun des termes de la somme puis on réécrit la fonction b sous la forme donnée.
   $$\begin{aligned} b'(x) &= -2x^{-3} + 5 \times (-3)x^{-4} \\ b'(x) &= \frac{-2}{x^3} + \frac{-15}{x^4} \end{aligned}$$
3. c est de la forme $u \times v$ avec $\begin{array}{ll} u(x) = 2x+3 & u'(x) = 2 \\ v(x) = \cos x & v'(x) = -\sin x \end{array}$
   Comme $u \times v = u'v + v'u$, on obtient :
   $$\begin{aligned} c'(x) &= (2)(\cos x) + (2x+3)(-\sin x) \\ c'(x) &= 2\cos x - (2x+3)\sin x \end{aligned}$$

4. d est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{array}{ll} u(x)=3x+2 & u'(x)=3 \\ v(x)=x^2+4 & v'(x)=2x \end{array}$

Comme $\frac{u}{v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, on obtient :

$$\begin{array}{lcl} d'(x) & = & \dfrac{3\times(x^2+4)-(2x)(3x+2)}{(x^2+4)^2} \\ d'(x) & = & \dfrac{3x^2+12-6x^2-4x}{(x^2+4)^2} \\ d'(x) & = & \dfrac{-3x^2+8x}{(x^2+4)^2} \\ d'(x) & = & \dfrac{x(-3x+8)}{(x^2+4)^2} \end{array}$$

5. e est de la forme u^n avec $n=5$, $u(x)=3x+1$, $u'(x)=3$.
Comme $(u^n)'=nu^{n-1}u'$, on a

$$\begin{array}{lcl} e'(x) & = & 5\times(3x+1)^4\times 3 \\ & = & 15(3x+1)^4 \end{array}$$

6. f est de la forme u^n avec $n=-3$, $u(x)=2x+1$, $u'(x)=2$.
Comme $(u^n)'=nu^{n-1}u'$, on a

$$\begin{array}{lcl} f'(x) & = & -3\times(2x+1)^{-4}\times 2 \\ & = & \dfrac{-6}{(2x+1)^4} \end{array}$$

7. g est de la forme $\cos u$ avec $u(x)=7x+2$, $u'(x)=7$.
Comme $[\cos(u)]'=-u'\sin(u)$, on a

$$g'(x)=-7\sin(7x-2)$$

8. h est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x)=3x^2+1$, $u'(x)=6x$.
Comme $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, on a

$$h'(x)=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$$

9. $i(x)$ est de la forme e^u avec $u(x)=x^2+3$, donc $u'(x)=2x$.
Comme $(e^u)'=u'e^u$, on a :

$$i'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2+3}$$

10. $j(x)$ est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x)=\cos(x)$, donc $u'(x)=-\sin(x)$.
Comme $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$, on a :

$$\begin{array}{lcl} j'(x) & = & \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} \\ & = & -\tan(x) \end{array}$$

Étude de signe

Pour étudier le signe, d'une expression, plusieurs cas peuvent se présenter :

1. On peut donner directement le signe de cette expression.
   Exemple : signe de x^2+1, signe de e^{-x})

2. Il s'agit d'une fonction affine.
   Exemple : signe de 3x+2 :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	

3. Il s'agit d'une expression du second degré : Dans ce cas, on cherche les racines du trinôme pour obtenir une éventuelle factorisation.
   Exemples :
   a. x^2+x+1 est non factorisable (pas de racine) donc du signe de $a=1$.
   b. $2x^2-12x+16$ est factorisable (racine 2 et 4) en $2(x-2)(x-4)$.On conclut avec un tableau de signe.
   c. $-2x^2-20x-50$ est factorisable (racine double -5) en $-2(x+5)^2$ toujours négatif.

4. Dans tous les autres cas, on essaye de factoriser l'expression pour se ramener à un des cas précédents.

On ne fait jamais de tableau de signe avec une somme.

Tangentes

Théorème 1 : Équation de la tangente

Si une fonction f est dérivable en un point x_0 alors la tangente en x_0 admet pour équation :

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Exercice 2 : Déterminer l'équation de la tangente en $x=5$ à la courbe réprésentative de la fonction $f(x)=x^2$.

Solution 2 : $f(x)=x^2$ donc $f(5)=25$. $f'(x)=2x$ donc $f'(5)=10$.
L'équation de la tangente en $x=5$ à la courbe réprésentative de f est

$$\begin{aligned} y &= f'(5)(x-5)+f(5) \\ &= 10(x-5)+25 \\ y &= 10x-25 \end{aligned}$$

Limites – Asymptotes – Positions relatives

Définition 1 : Asymptote

- *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ *alors la droite d'équation* $y=b$ *est une* ***asymptote horizontale*** *à la courbe* $\mathcal{C}$ *en* $\pm\infty$.
- *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ *alors la droite d'équation* $x=a$ *est une* ***asymptote verticale*** *à la courbe* $\mathcal{C}$.
- *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ *alors on ne peut rien conclure.*
- *Si* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x)-(mx+p)\big)=0$ *alors la droite d'équation* $y=mx+p$ *est une* ***asymptote oblique*** *à la courbe* $\mathcal{C}$.

Méthode : Position relative

Pour étudier les positions relatives de deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de deux fonctions f et g, on étudie le signe de $f(x)-g(x)$.
Si $f(x)\geqslant g(x)$ alors $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.

Exercice 3 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{I} = \left]-1;+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2+5x+14}{x+1}$$

Soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étude des limites.
  - **a.** Déterminer la limite de f en -1.
  - **b.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
  - **c.** Quelle(s) asymtpote(s) peut-on déduire de ces limites ?

2. Étude de l'asymptote oblique.
  - **a.** Déterminer les nombres réels a, b et c, tels que, pour tout x de l'intervalle $\mathcal{I}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

  - **b.** Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 3x+2$ est une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$.
  - **c.** Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ pour x variant dans $\left]-1;+\infty\right[$.

Solution 3 :

1. **a.** $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\mapsto -1} 3x^2+5x+14 = 22 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x+1 = 0^+ \end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

b. La limite d'une fraction en l'infini est la même que la limite de la fraction de ses termes de plus haut degré.
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^2+5x+14}{x+1} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{3x^2}{x} = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} 3x = +\infty$

c. $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$ donc $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

2. **a.**

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

$f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} = \dfrac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \dfrac{ax^2+(b+a)x+b+c}{x+1}$

Par identification : $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ a+b & = & 5 \\ b+c & = & 14 \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & 2 \\ c & = & 12 \end{array}\right.$

d'où

$$f(x) = 3x + 2 + \frac{12}{x+1}$$

b. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) - (3x+2) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{12}{x+1} = 0.$
La droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = 3x+2$ est bien une asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ en $+\infty$

c. $f(x) - (3x+2) = \dfrac{12}{x+1} > 0$ sur $\left]-1;+\infty\right[$ donc $(\mathscr{C})$ au dessus de $(\mathscr{D})$ sur $\mathcal{I}$.