Produit scalaire

À la fin de ce td, vous devez être capable de :
- Calculer le produit scalaire de deux vecteurs :
  - à l'aide des normes et d'un angle ;
  - à l'aide d'une projection orthogonale ;
  - à l'aide des coordonnées.
- Calculer un angle ou une longueur à l'aide d'un produit scalaire.
- Utiliser le produit scalaire pour déterminer si des vecteurs sont orthogonaux.

Calculs de produit scalaire.

3.1 Application de la définition.

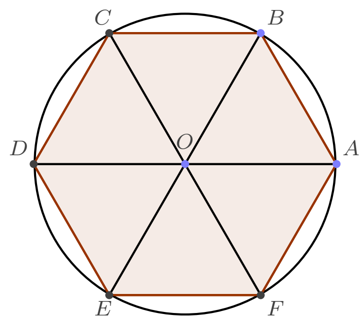
Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1. $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{v}|| = 4$, et $(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$.
2. $||\vec{u}|| = 4$, $||\vec{v}|| = 5$, et $(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{5\pi}{6}$.
3. $||\vec{u}|| = \sqrt{2}$, $||\vec{v}|| = \sqrt{2}$, et $(\vec{u};\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$.
4. $||\vec{u}|| = 1,2$, $||\vec{v}|| = 3,4$, et $(\vec{u};\vec{v}) = 67^o$.

3.2 On considère un hexagone régulier $ABCDEF$ inscrit dans un cercle de centre O et de rayon R.

Exprimer en fonction de R les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$.
2. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$.
3. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$.



3.3 Produit scalaire et projeté orthogonal.

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires, O, A et B trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA).

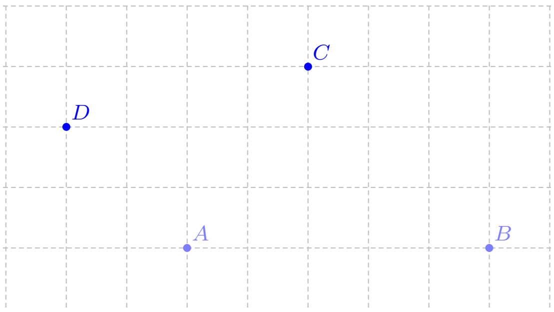
1. On suppose dans cette partie que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont le même sens.
   a. Faire une figure.
   b. En se plaçant dans un triangle rectangle, exprimer OH en fonction de OB et de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.
   c. Exprimer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction des longueurs OA et OH.
2. On suppose à présent que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OH}$ ont des sens contraires.
   a. Faire une nouvelle figure.
   b. En se plaçant dans un triangle rectangle, exprimer OH en fonction de OB et de l'angle $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OB})$.

c. Quelle relation y a-t-il entre les angles $(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$?

d. En déduire la relation entre $\cos(\overrightarrow{OH};\overrightarrow{OB})$ et $\cos(\vec{u};\vec{v})$.

e. Exprimer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ en fonction des longueurs OA et OH.

3.4 On considère la figure ci-dessous.



En utilisant le quadrillage et des projetés orthogonaux, calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\,;\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\,;\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

3.5 On considère un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 3$cm et $AC = 4$ cm.
Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

3.6 Produit scalaire et coordonnées cartésiennes.
Les vecteurs considérés sont des vecteurs soit du plan, soit de l'espace.
Calculer le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
2. $\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$
3. $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$
4. $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$
5. $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\8\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}$

Calculs de distances et d'angles dans le plan.

3.7 Calculs d'angles.
On considère les points $A(1;1)$, $B(3;2)$ et $C(4;8)$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Faire une figure.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.
4. Calculer les distances AB et AC.
5. En déduire la valeur approchée en dégré, arrondie à 10^{-1} de la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.
6. Vérifier avec un rapporteur sur votre figure.

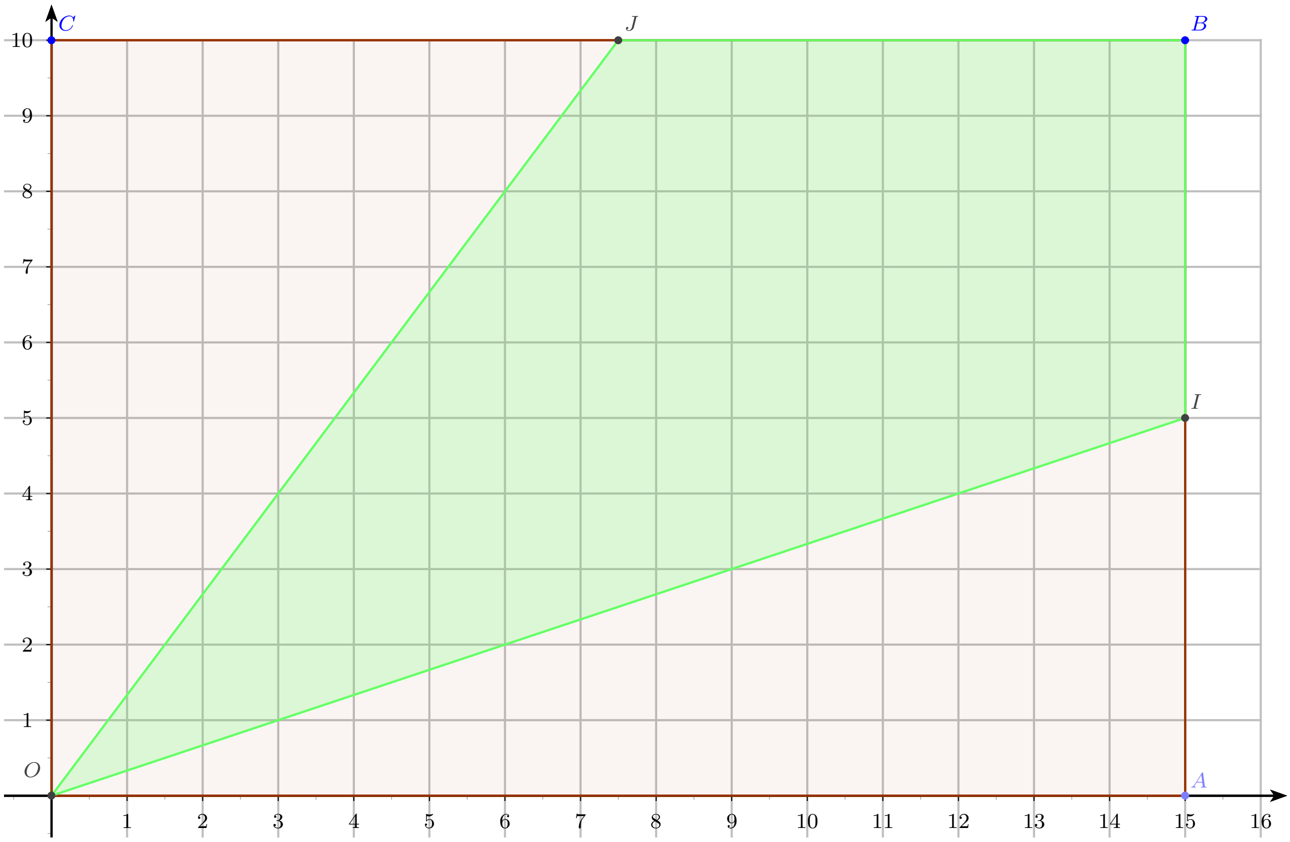
3.8 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Dans chacun des cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, puis $\cos(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Vérifier sur une figure avec un rapporteur.

1. $A(1,2)$; $B(3,-4)$; $C(1,-1)$.
2. $A(4,1)$; $B(-3,1)$; $C(1,5)$.
3. $A(1,-1,-1)$, $B(0,-3,1)$ et $C(-4,1,3)$.

3.9 Dans chacun des cas suivants, calculer une mesure de l'angle géométrique $(\vec{u};\vec{v})$.

1. $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
2. $\vec{u}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$
3. $\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$
4. $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$
5. $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\5\\-3\end{pmatrix}$

3.10 Le rectangle $OABC$ ci-dessous représente la scène d'un théatre vu de dessus.



Les dimensions de la scène sont $OA=15$ cm et $OC=10$ cm. Au point O, on place un spot permettant d'éclairer la zone limitée par les segments de droite $[OI]$ et $[OJ]$ où I est le milieu de $[AB]$ et J est le milieu de $[CB]$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé donné sur la figure, d'origine O et d'unité graphique le centimètre.

1. Déterminer les coordonnées des points I et J.

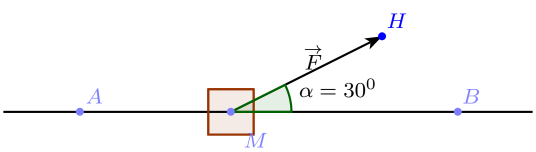
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$.
3. Calculer les distances OI et OJ.
4. Calculer la mesure, arrondie au degré, de l'angle $\widehat{IOJ}$ correspondant à la zone éclairée.
5. Calculer l'aire de la zone éclairée.

$\boxed{3.11}$ **Utilisation des différentes expressions du produit scalaire.**
Soient un carré $ABCD$ et les points I et J milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$. Soit H le projeté orthogonal de D sur la droite (AJ) et K le point d'intersection de segments $[AJ]$ et $[CI]$.

1. Faire une figure.
2. On souhaite calculer la distance du point D à la droite (AJ).
   a. En utilisant le repère $(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   b. En utilisant le projeté orthogonal de J sur (AD), donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{AD}$.
   c. En déduire la longueur AH.
   d. En déduire la distance du point D à la droite (AJ).
3. On souhaite calculer l'angle $\widehat{JKI}$.
   a. En utilisant le repère $(A, \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD})$, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{CI}$.
   b. En utilisant la définition, donner une expression du produit scalaire $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{CI}$.
   c. En déduire une valeur de $\cos(\widehat{JKI})$ puis de $\widehat{JKI}$.

Applications du produit scalaire.

$\boxed{3.12}$ **Travail d'une force.**
Le travail d'une force $\vec{F}$ lorsque son point d'application se déplace sur la droite (AB) est le produit scalaire $\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.
Calculer le travail W avec $||\vec{F}|| = 50$, $AB = 2.50$ et $\alpha = 30^0$. Arrondir à 10^{-2}.



$\boxed{3.13}$ **Orthogonalité.**
On considère les points M, N et P de coordonnées

$$M(3; 3; 2) \; ; \; N(4; 2; 5) \; ; \; P(5; 11; 4)$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
3. En déduire la nature du triangle MNP.

3.14 Dans un répère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées :

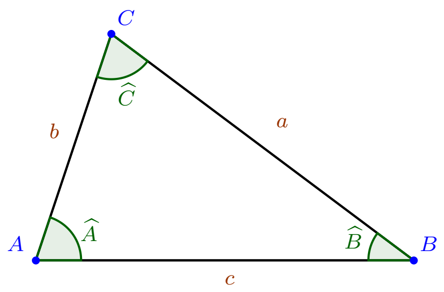
$$\vec{u}\begin{pmatrix}1+m\\m+5\end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}\begin{pmatrix}2-m\\m-4\end{pmatrix} \text{ où } m \text{ est un réel}$$

Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient égaux.

3.15 On considère un trapèze rectangle $ABCD$ de hauteur $[AB]$ tel que $AB = 4$, $BC = 8$ et $AD = 2$.

1. Calculer $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ en décomposant les vecteurs.
2. Que dire des diagonales (AC) et (BD) ?

3.16 **Relations métriques dans le triangle.**
Le but de cet exercice est de démontrer les formules d'Al-Kashi.
Soit ABC un triangle quelconque. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $A = \widehat{CAB}$, $B = \widehat{ABC}$ et $C = \widehat{BCA}$,



1. **Formule d'Al Kashi**
   a. Quel est le lien entre $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$ et BC ? En déduire la valeur de $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$.
   b. En décomposant les vecteurs, donner une expression de $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}$ en fonction de b, c et $\widehat{A}$.
   c. Déduire des deux égalités précédentes la formule d'Al-Kashi :
   $$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \tag{1}$$
2. **Loi des sinus**
   Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
   a. Exprimer AH en fonction de b et $\widehat{A}$.
   b. Exprimer AH en fonction de a et $\widehat{B}$.
   c. En déduire que
   $$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})}$$
   d. En utilisant le projeté orthogonal de B sur AC et en suivant le même raisonnement, établir une égalité similaire à celle de la question précédente.
   e. En déduire la formule connue sous le nom de « loi des sinus » :
   $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Remarque : La formule(1) généralise le théorème de Pythagore. Cette formule est circulaire, c'est à dire que l'on a :

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

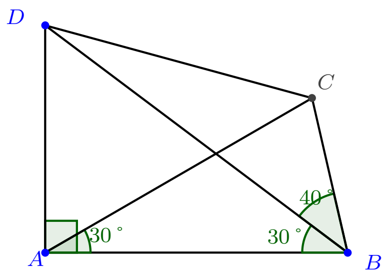
Ces formules permettent, à partir de la connaissance de 3 mesures (angles ou longueurs) dans un triangle ABC de connaitre toutes les mesures de ce triangle.

3.17 **Apllications des formules d'Al Kashi.**
Les quatres questions suivantes sont indépendantes.
Tous les résultats sont à donner sous forme de valeurs approchée arrondie à 10^{-2} près.

Dans chacune des qestions suivantes, on demande de trouver, pour un triangle ABC, une mesure des trois angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, les longueurs $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et l'aire du triangle.
On utilisera les formules démontrées à l'exercice précédent.

1. $a = 125$; $\widehat{A} = 54^0$; $\widehat{B} = 65^0$.
2. $b = 215$, $c = 150$, $\widehat{B} = 42^0$.
3. $\widehat{A} = 57,65^0$; $a = 125,34$, $c = 56,91$.
4. $\widehat{B} = 50,29^0$; $\widehat{A} = 88,36^0$, $a = 48,17$.

3.18 **Calculer la distance séparant deux points situés en mer.**
On considère le quadrilatère $ABCD$ où $AB = 10$cm, $\widehat{BAD} = 90^o$, $\widehat{CAB} = 30^o$,$\widehat{ABD} = 30^o$ et $\widehat{DBC} = 40^o$.

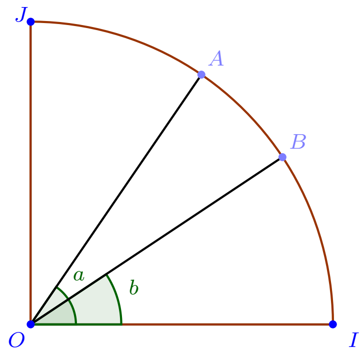


1. Calculer les distances AD et BD. On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies au millimètre.
2. Calculer les distances AC et BC. On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées arrondies au millimètre.
3. En déduire DC.

La méthode utilisée dans cet exercice pour le calcul de DC peut-être utiliséee pour calculer, à partir de deux points A et B situés sur une côte, la distance séparant deux points D et C situés en mer.

3.19 **Formules trigonométriques.**

Soient A et B deux points du cercle trigonométrique tels que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = a$ et $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = b$.



1. **a.** Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.

   b. En utilisant la définition du produit scalaire, donner l'expression de $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
2. **a.** Donner les coordonnées des points A et B.

   b. En déduire la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$.
3. Déduire des deux expressions obtenues les formules d'additions du cosinus.
4. En faisant $a = b$ dans la formule précédente, donner la formule pour $\cos(2a)$.

Annales.

3.20 **CPI 2014.**

1. Dans un repère orthonormal direct du plan, les points $\mathrm{A}(O\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\mathrm{B}(0\,;\,13\,;\,1)$ et $\mathrm{C}\left(3\sqrt{3}\ ;\ 4\ ;\ 1\right)$ sont donnés.

   On rappelle que si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs du plan, le produit scalaire des deux vecteurs est donné par

   $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \cos\left(\vec{v}\ ;\ \vec{v}\right)$$

   Une mesure, en radian, de l'angle $\widehat{\mathrm{BAC}}$ est :

   a. Réponse A : $\dfrac{\pi}{6}$ **b.** Réponse B : $\dfrac{\pi}{4}$ **c.** Réponse C : $\dfrac{\pi}{3}$
2. Dans un repère orthonormal de l'espace les points $\mathrm{A}(1\,;\,0\,;\,2)$, $\mathrm{B}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1)$, $\mathrm{C}(2\,;\,1\,;\,0)$ sont donnés.

   On considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ où a et b sont deux nombres réels. Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) si :

   a. Réponse A : $a = 2$ et $b = 0$

   b. Réponse B : $a = 1$ et $b = -1$

c. Réponse C : $a = 5$ et $b = 3$

3.21 **CPI 2013.**

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points A(1 ; 3 ; 2), B(0 ; 5 ; -2) et C(a ; 2 ; 2) où a est un nombre réel.
Déterminer la valeur de a pour que le triangle ABC soit rectangle en A.
On pourra utiliser le produit scalaire.

3.22 **CPI 2011.**

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}$. Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est égale à :

1. Réponse A : -1
2. Réponse B : 5
3. Réponse C : $\vec{v}$

3.23 **CPI 2009.**

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal direct de l'espace.
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont :

1. Réponse A : orthogonaux ;
2. Réponse B : colinéaires ;
3. Réponse C : ni orthogonaux, ni colinéaires.