Configurations géométriques

À la fin de ce td, vous devez être capable de :

- Lire et interpréter une représentation d'un objet constitué de solides usuels.
- Représenter, identifier et étudier la section d'un solide par un plan dans un cas simple.
- Isoler, représenter et étudier une figure plane extraite d'un solide.
- Utiliser les acquis de géométrie pour :
  - ◇ calculer la longueur d'un segment, la mesure d'un angle en degrés, l'aire d'une surface et le volume d'un solide ;
  - ◇ déterminer les effets d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les volumes.

Configurations dans le plan.

7.1 Pour mesurer la hauteur d'un arbre.

Pour mesurer la hauteur d'un arbe, un paysagiste plante un bâton verticalement à côté de l'arbre. Il mesure la hauteur h du bâton au-dessus du sol, la longueur l de l'ombre du bâton sur le sol, puis la longueur L de l'ombre de l'arbre sur le sol.

1. Faire une figure.
2. Calculer la hauteur H de l'arbre en fonction de h, L et l.
3. Application numérique : $h = 1,30$m, $l = 0,10$m, et $L = 0,70$m.

7.2 Rectangle d'or.

On appelle « Nombre d'or » le nombre noté, ϕ, tel que

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ce nombre a beaucoup été utilisé en architecture.
On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.

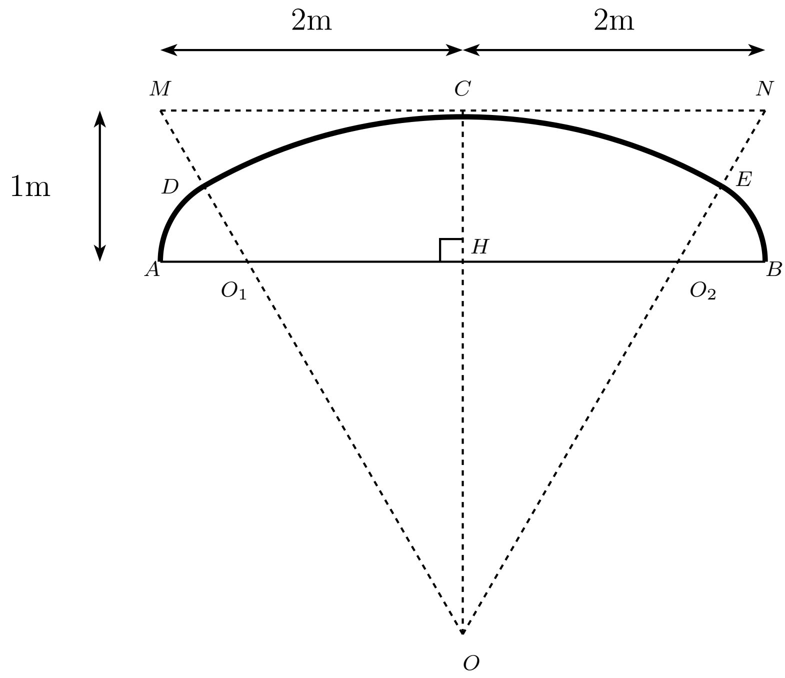
Soit $ABCD$ un carré. On considère :

- le point I milieu du segment $[DC]$;
- le cercle $\mathscr{C}$ de centre I et de rayon IA ;
- le point E intersection de la demi-droite $[DC)$ et du cercle $\mathscr{C}$;
- le point F tel que $AFED$ soit un rectangle.

1. Faire une figure.
2. Exprimer la distance DI en fonction de la distance AD.
3. Montrer que $IA^2 = \frac{5}{4}AD^2$ et en déduire l'expression de IE en fonction de AD.
4. Déduire des deux questions précédentes que $DE = \phi \times AD$ et que le rectangle $AFED$ est un rectangle d'or.

7.3 **Voûte en « anse de panier » .**

La figure ci-dessous représente la coupe d'une voûte en « anse de panier ».



Le triangle OMN est équilatéral.

L'arc $\overset{\frown}{DE}$ appartient au cercle de centre O et de rayon OC.

L'arc $\overset{\frown}{DA}$ appartient au cercle de centre O_1 et de rayon O_1A.

L'arc $\overset{\frown}{EB}$ appartient au cercle de centre O_2 et de rayon O_2B.

Les longueurs AB et MN sont égales. Les cotes sont en mètres.

Dans ce qui suit, on demande pour les résultats les valeurs exactes puis une valeur approchée à 10^{-2} près.

1. a. Calculer la distance OC.

   b. En déduire la longueur OH et celle de l'arc $\overset{\frown}{DE}$.

2. a. Calculer la longueur O_1H.

   b. En déduire la longueur O_1A et celle de l'arc $\overset{\frown}{AD}$.

3. Calculer la longueur du « cintre » $ADEB$.

Un peu d'architecture :

« L'anse de panier » a trois centres : les points O, O_1 et O_2. Certaines voûtes utilisent des « anses de panier » à cinq, sept, neuf ou onze centres.

Les voûtes en « anse de panier » ont été beaucoup utilisé dans la construction des ponts au XVII^e^ et au XVIII^e^ siècles.

Les voûtes romaines sont des arcs de cercle ;au XIV^e^ et au XV^e^ siècles, on utilisait des ogives à deux ou quatres centres. À partir du XIX^e^ siècle, on a souvent utilisé des ellipses (par exemple pour les voûtes du métro parisien) et des arcs de cercle.

Configurations dans l'espace.

7.4 **Solides de Platon et solides d'Archimède.**

1. Un **solide de Platon** est une figure de l'espace dont toutes les faces sont des polygones identiques, avec le même nombre de faces se joignant à chaque sommet.

a. Utiliser les polygones mis à disposition pour trouver tous les solides de Platon.

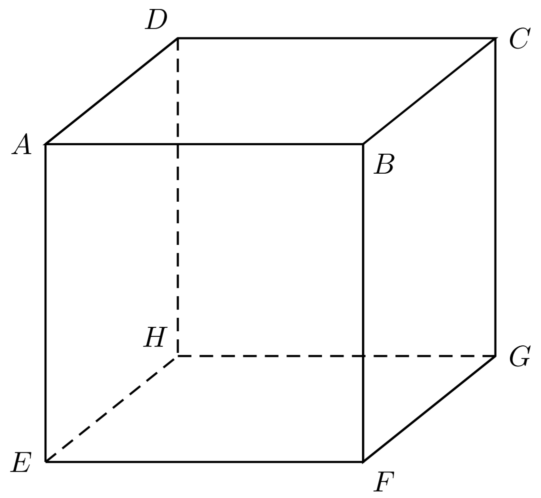
b. Pour chaque solide, compter le nombre de face (F), le nombre de sommet (S) et le nombre d'arêtes (A). Calculer ensuite la valeur de $S - A + F$.

c. En utilisant les nombres grecs et le suffixe « èdre » , donner leur nom.

d. Prouver qu'il n'existe pas d'autres solides de Platon que ceux que vous avez trouvé.

2. Un **solide d'Archimède** est un polyèdre dont les faces sont des polygones réguliers d'au moins deux types.
Utiliser les polygones mis à disposition pour trouver le maximum de solide Archimédien.

7.5 On considère un cube $ABCDEFGH$ de 4 m de côté. I et K sont les milieux respectifs des segments $[BF]$ et $[AB]$. J est le point de $[EF]$ tel que $EJ = \frac{1}{4}EF$.



1. Quatre fourmis se déplacent sur le cube afin d'effectuer le trajet séparant A de G suivant les modalités suivantes :

a. $AJ + JG$;

b. $AI + IF + FG$;

c. $AF + FG$;

d. $AK + KI + IG$.

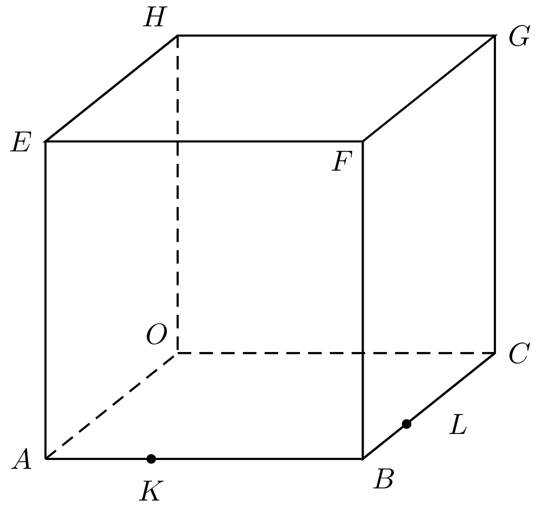
Calculer la distance exacte parcourue par chacune des fourmis puis en donner une valeur approchée arrondie au centimètre près.

2. **a.** Réaliser un patron du cube à l'échelle $1/200^{e}$.

b. En déduire la longueur du trajet le plus court pour aller de A à G.

3. Sachant qu'une fourmi de « compétition » se déplace à la vitesse vertigineuse de $5 \times 10^{-2}\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, déterminer le temps qu'il lui faudra pour effectuer le trajet complet.
On donnera la réponse en minutes et secondes, à la seconde près.

7.6 **Calcul vectoriel dans l'espace.**
On a représenté ci-dessous un cube $ABCOEFGH$ d'arêtes 3 cm.
On place ce cube dans le repère orthonormé de sens direct d'origine 0, d'axes de direction $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OH}$ et d'unité le centimètre.



On note K le point du segment $[AB]$ tel que $AK = \dfrac{1}{3}AB$ et L le point du segment $[BC]$ tel que $BL = \dfrac{1}{3}BC$.

Partie A – Étude du triangle KLF

1. Donner les coordonnées des points F, K et L.
2. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FK}$ puis celle du vecteur $\overrightarrow{FL}$.
3. **a.** Calculer les distances FK, FL.
   b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{FL}$.
   c. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{FKL}$.
4. **a.** Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{FK} \wedge \overrightarrow{FL}$.
   b. En déduire l'aire du triangle KFL.

Partie B – Étude du solide tronqué $AKLCOEFGH$

On enlève au cube $ABCOEFGH$ de départ, le tétraèdre $KBLF$. On obtient ainsi le solide tronqué $AKLCOEFGH$.

1. Donner sans justification la nature des faces du solide tronqué $AKLCOEFGH$.
2. Montrer que l'aire totale de toutes les faces du solide $AKLCOEFGH$ est égale à 52 cm^2.
3. Calculer le volume du solide $AKLCOEFGH$.

7.7 **Formule de Kepler.**
Il existe des formules pour calculer des volumes de prismes, pyramides, cônes, sphères mais en pratique, c'est insuffisant pour certains solides particuliers (cuve à fioul, tonneaux, troncs de cônes, ...).
Le mathématicien Kepler (1571 - 1630) a proposé une formule, appelée **formule des trois niveaux**, destinée à calculer le volume approché de solides comme par exemple les tonneaux.

$$\mathscr{V} = \frac{h(\mathscr{A}_0 + 4\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)}{6}$$

où h est la hauteur du solide, $\mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$ désignent l'aire de la base, à mi-hauteur et au sommet.

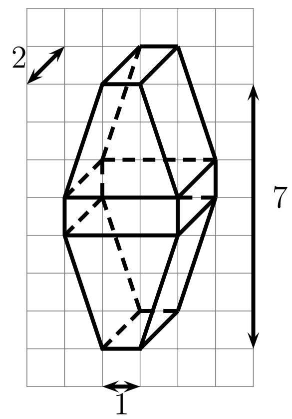
Partie A – Quelques situations où la formule est exacte

1. Cas d'un pavé droit de mesures L, l et h.
   a. Représenter un pavé droit en perspective cavalière.
   b. Représenter en rouge le plan de base, le plan à mi-hauteur et le plan du sommet.
   c. Calculer l'aire de chacune de ces sections.
   d. En déduire le volume obtenue en utilisant la formule des trois niveaux.
   e. Comparer avec la formule connue pour le volume d'un pavé droit.
2. Cas d'une sphère de rayon r.
   a. Reprendre les questions précédentes pour déterminer le volume d'une sphère de rayon r à partir de la formule des trois niveaux.
3. Cas d'une pyramide à base quelconque.
   On considère une pyramide de hauteur h et d'aire de base $\mathscr{A}_0$.
   a. Exprimer l'aire à mi-hauteur en fonction de l'aire de base.
   b. Calculer le volume de la pyramide en fonction de h et $\mathscr{A}_0$ en utilisant la formule de trois niveaux.
   c. Comparer avec la formule connue.

On peut démontrer (mais on ne demande pas de le faire) que cette formule est aussi exacte dans le cas d'un cône, d'un tonneau et d'autres formes ...

Partie B – Limite de la formule

La figure ci-dessous est composée de trois prismes. Les unités sont en mètres.



1. Calculer le volume exact de chacun des prismes.
   En déduire le volume du solide.
2. Appliquer la formule des trois niveaux à ce solide.
3. Quelle est, en pourcentage, l'erreur commise en prenant la formule des trois niveaux.

Partie C – Applications

Roger a trois tonneaux identiques dans son sous-sol. Avec un mètre a couture, il a mesuré la hauteur, le périmètre en haut, en bas et au milieu d'un des trois tonneaux.

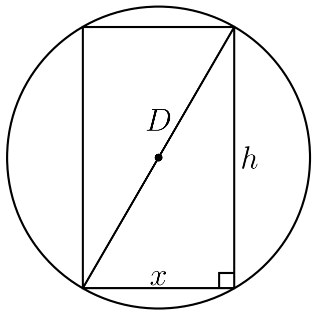
$$h = 70 \text{ cm} \qquad \mathscr{P}_0 = 155 \text{ cm} \qquad \mathscr{P}_1 = 176 \text{ cm} \qquad \mathscr{P}_2 = 155 \text{ cm}$$

Pour faire du cidre, on laisse fermenter du jus de pomme dans un tonneau, puis on le met dans des bouteilles de champagne (75cl) que l'on capsule.
Combien de bouteilles de cidre peut faire mon beau-père ?
Notes :

- 1 dm^3=1L
- Il s'agit d'une quantité maximale puisque en pratique on ne prend pas le fond du tonneau dans lequel il y a du dépot.

$\boxed{7.8}$ Poutre de résistance maximale dans un tronc.

Lorsque l'on veut équarrir un tronc d'arbre de manière à donner à la poutre la plus grande résistance possible à la flexion, on se garde bien de la faire carrée, mais toujours plus haute que large.
Si la base de la poutre est x et sa hauteur est h, on montre en mécanique que la résistance est d'autant plus grande que xh^2 est grand.
On note D le diamètre du tronc, en mètres.



Coupe du tronc et de la poutre

1. Exprimer le produit xh^2 en fonction de D et x.
2. Indiquer les dimensions x et h (en fonction de D) de la poutre issue de ce tronc d'arbre qui a le maximum de resistance à la flexion.

$\boxed{7.9}$ Réservoir à fioul de dimension optimale.

On cherche à réaliser un réservoir à fioul de dimension optimale, c'est à dire nécessitant la surface minimale de tôle d'acier pour un volume donné.
Le réservoir est cylindrique à fonds plats de rayon R ; sa hauteur est L.

1. **a.** En négligeant l'épaisseur de la tôle, exprimer en fonction de R et de L, le volume V du réservoir et l'aire S de la surface de tôle nécessaire à sa construction.
   b. En déduire que $S = 2\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}$.
2. Le volume étant considéré comme une constante réelle positive, on considère la fonction f_V définie sur $[0; +\infty[$ par $f_V(R) = 2\pi R^2 + 2\dfrac{V}{R}$.
   On note $\mathscr{C}_V$ la courbe représentative de la fonction f_V.
   a. Calculer les limites de f_V lorsque R tend vers 0, puis lorsque R tend vers l'infini.
   b. Étudier les variations de la fonction f_V.
3. **a.** Montrer que les dimensions optimales du réservoir pour un volume V donné sont :
   $$R_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{et} \quad L_0 = 2R_0$$
   b. Montrer que la surface de tôle est alors de $6\pi R_0^2$.

7.10 **Rectangle d'aire maximale dans une pyramide.**

Partie A – Quelques fonctions auxiliaires

Soient f, g et $\mathscr{A}$ trois fonctions définies sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = 2x \quad ; \quad g(x) = 4 - 2x \quad ; \quad \mathscr{A}(x) = f(x) \times g(x)$$

1. Quelle est la nature de la fonction f ?

2. Quelle est la nature de la fonction g ?

3. **a.** Déterminer l'expression de la fonction $\mathscr{A}$.

b. Quelle est la nature de la fonction $\mathscr{A}$?

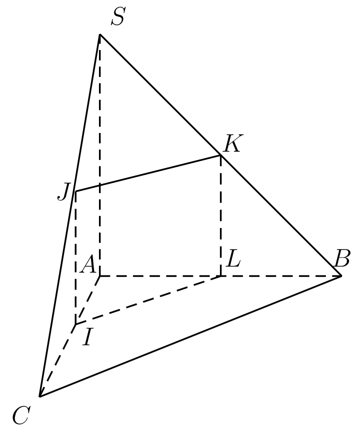
c. En déduire l'allure de la courbe et son extremum.

Partie B – Aire d'un tétraèdre

On considère un tétraèdre $SABC$ tel que $SA = BC = 4$ cm et $AB = 2$ cm.
Les triangles SAC, ABC et SAB sont tous les trois rectangles A.
Les points I, J, K et L sont sur les arêtes $[AC]$, $[SC]$, $[SB]$ et $[AB]$ et tels que :

- les droites (IJ) et (KL) sont parallèles à la droite (SA) ;
- les droites (IL) et (JK) sont parallèles à la droite (BC).

On admet que le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.



1. Calculer la longueur AC.

2. Déterminer le volume de la pyramide $SABC$.

3. Construire un patron en dimension réelle. Les points I, J, K et L devront apparaître sur le patron.

On cherche la position du point L sur le segment $[AB]$ qui rendent l'aire du rectangle $IJKL$ la plus grande possible. On pose $AL = x$.

1. Dans quel intervalle varie x ? Justifier.

2. Démontrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $IL = 2x$ et que $KL = 4 - 2x$.

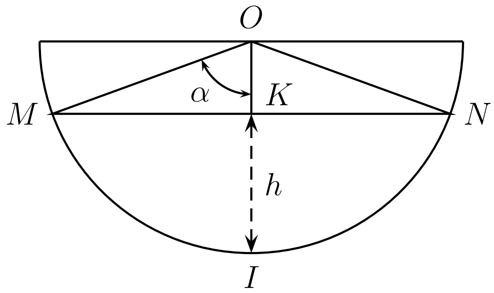
3. En utilisant la partie A, déterminer la position du point L sur $[AB]$ pour laquelle l'aire du rectangle $IJKL$ est maximale.

4. Quelle est alors la nature du quadrilatère $IJKL$? Justifier.

$\boxed{7.11}$ Jauge d'un réservoir cylindrique.
Un réservoir a la forme d'un demi-cylindre de rayon 0.35 mètres et de longueur 2 mètres.

1. Calculer le volume du réservoir en litres. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près du résultat.

2. On se propose de déterminer les valeurs de la hauteur h de liquide contenu dans le réservoir correspondant à un volume de liquide de 50 litres, 100 litres, 150 litres,. . . , 350 litres, ce qui permettra, ensuite, de réaliser une jauge graduée.



a. Le nombre réel α étant une mesure en radians de l'angle $\widehat{MOI}$, montrer que la hauteur $h(\alpha)$ de liquide, en centimètres, est égale à

$$h(\alpha) = 35 - 35\cos\alpha.$$

b. **i.** Exprimer l'aire du secteur angulaire d'arc $\overset{\frown}{MN}$ en fonction de α.

ii. Exprimer l'aire du triangle MON en fonction de α.

iii. En déduire l'expression de la surface du liquide en fonction de α.

iv. Montrer que le volume $V(\alpha)$ de liquide, en litres, contenu dans le réservoir est

$$V(\alpha) = 245\alpha - 122.5\sin 2\alpha.$$

3. On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équations paramétriques définies pour tout nombre réel α dans $[0; \frac{\pi}{2}]$ par

$$\begin{cases} x &= h(\alpha) &= 35 - 35\cos\alpha \\ y &= V(\alpha) &= 245\alpha - 122.5\sin 2\alpha \end{cases}$$

a. Utiliser Geogebra pour construire la courbe $\mathscr{C}$.

b. Utiliser le tableur de Géogebra pour obtenir un tableau de valeurs de h et de V pour les valeurs de α suivantes : 0 ; $\frac{\pi}{16}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{8}$; $\frac{7\pi}{16}$; $\frac{\pi}{2}$.

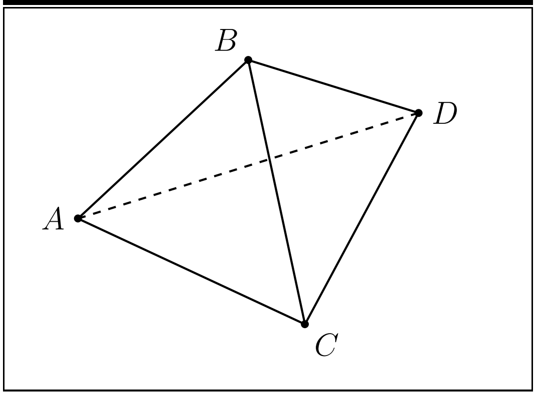
c. Utiliser la courbe $\mathscr{C}$ pour déterminer graphiquement les valeurs de h en centimètres correspondant respectivement à $V = 50$, $V = 100$, $V = 150$, $\cdots$, $V = 350$, qui permettront ensuite, de construire une jauge.
L'utilisation d'un curseur peut permettre d'automatiser la résolution.

Sections de solide par un plan

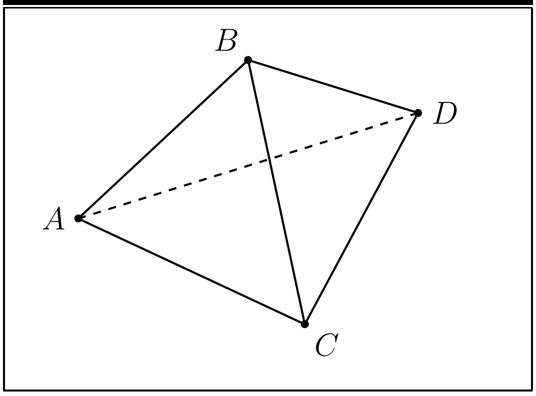
$\boxed{7.12}$ **Section d'un tétraèdre.**
On considère un tétraèdre $ABCD$. Trouver un plan tel que la section du tétraèdre par le plan soit :

1. un triangle équilatéral ;
2. un triangle isocèle (non équilatéral) ;
3. un triangle quelconque ;
4. un carré ;
5. un carré (non rectangle) ;
6. un trapèze (non parallégramme).

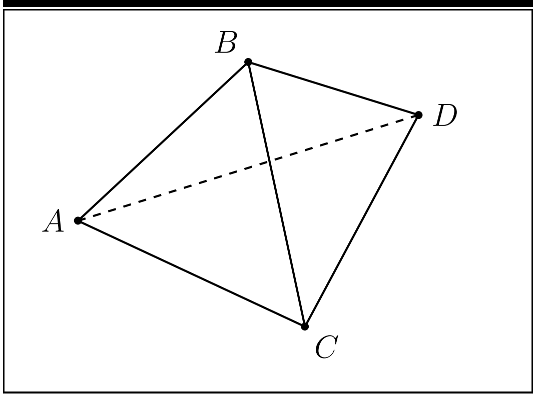
Question 1



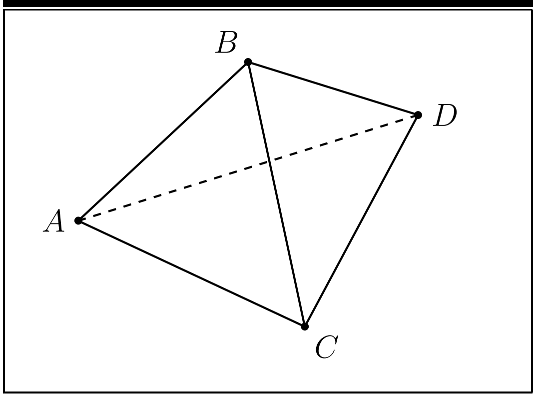
Question 2



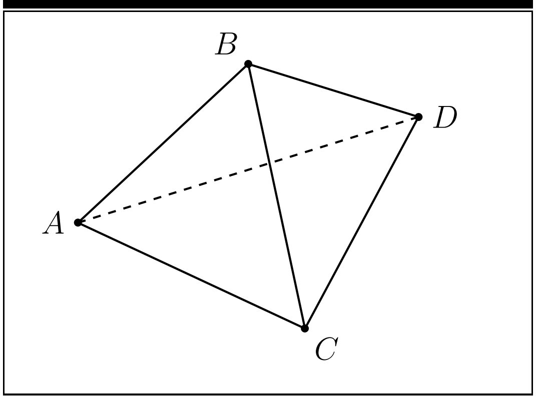
Question 3



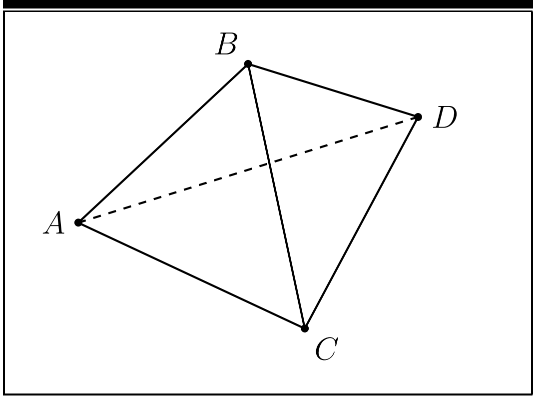
Question 4



Question 5



Question 6



7.13 Résoudre les énigmes proposées sur le site web :

`http://www.mhhe.com/math/ltbmath/applets/ch9/index.html`

7.14 Pour chacun des cubes ci-dessous, tracer la section par le plan défini par les trois points donnés.