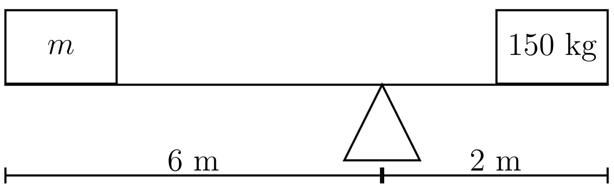
Section technicien supérieur
Cours de mathématiques

# Chapitre 1
# Vecteurs et Barycentres

**Motivation :** sachant que la balance suivante est en équilibre, quel est la valeur de la masse $m$ ?




*Le terme de barycentre est formé sur la racine grecque barus (lourd) pour désigner un centre des poids ou centre d'équilibre. Sa conception est liée au théorème des moments découvert par Archimède au IIIe siècle av. J.-C.*
*Pour que la balance soit en équilibre, il faut que les moments, c'est-à-dire les produits des longueurs de bras par les masses correspondantes, soient égaux. Autrement dit le point d'équilibre est caractérisé par la relation :* $m_1 \times OA = m_2 \times OB$*. Ce principe des moments est d'ailleurs utilisé dans la balance dite romaine.*
*Les poids peuvent également avoir une valeur numérique négative, si l'une des masses est remplacée par un ballon d'hélium, par exemple. Dans ce cas, le point d'équilibre se situe en dehors de l'espace délimité par les deux objets.*


Aymar de Saint-Seine
Année scolaire 2014–2015

# 1. Barycentre de deux points

## 1.1. Définition

**Définition 1 : Barycentre**

*On appelle* **barycentre de deux points** $(A, \alpha)$ *et* $(B, \beta)$ *avec* $\alpha + \beta \neq 0$ *le point* $G$ *tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

*On note* $G = bar\{(A; \alpha)\ ;\ (B; \beta)\}$.

***Exercice résolu 1 :***

Soit $[AB]$ un segment, construire le barycentre $G$ de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

***Solution :*** Par définition, le point $G$ vérifie :

$$3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Malheureusement, cette relation ne nous donne pas directement des informations sur la position de $G$. Transformons l'égalité grâce à la relation de Chasles. On obtient :

$$3\overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \text{ donc } 5\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Pour placer le point $G$, on divise le segment $[AB]$ en 5 parties de longueurs égales.


*Remarques :*

1. 
   - Physiquement, $G$ est le point d'équilibre de la balance munie des points $A$ et $B$ avec les masses respectives $\alpha$ et $\beta$.
   - Mathématiquement, la notion est étendue à des coefficients qui peuvent être négatifs.
   - En mécanique, le barycentre peut aussi s'appeler le **centre d'inertie**, le **centre de gravité** ou le **centre de masse**.
2. Pour toute la suite, on se place dans le cas où $\alpha + \beta \neq 0$.
3. cas particuliers :
   - Si $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$, la relation devient $\beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ d'où $G = B$
   - Si $\beta = 0$ et $\alpha \neq 0$, la relation devient $\alpha\overrightarrow{GA} = \vec{0}$ d'où $G = A$
   - Si $\alpha = \beta$, la relation devient $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, ce qui signifie que $G$ est le milieu du segment $[AB]$. On dit dans ce cas que $G$ est **l'isobarycentre** du système.

*Exemple :* Solution de l'exercice de motivation :

$$m\overrightarrow{GA} + 150\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Or, $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GB}$ donc :

$$-3m\overrightarrow{GB} + 150\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$(-3m + 150)\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$
$$-3m + 150 = 0$$
$$m = 50 \text{ kg}$$

## 1.2. Caractérisation du barycentre

**Théorème 1 : Indépendance du repère**

*Le point $G$ est le barycentre des points $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$ si, et seulement si pour tout $M$ du plan on a :*

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}.$$

*Cette relation indique que la position du barycentre est indépendante du repère choisi.*

**Démonstration :** $G$ est le barycentre des points $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$ donc, par définition, on a :

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

On utilise la relation de Chasles :

$$\alpha(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0}$$

d'où :

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + (\alpha + \beta)\overrightarrow{GM} = \vec{0}$$
$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{MG}$$

□

**Théorème 2 :**

*En particulier, si on prend $M = A$ dans la relation, on a :*

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

*Cette dernière relation permet de placer le point $G$ et de montrer que, quel que soient les coefficients $\alpha$ et $\beta$ le barycentre des points $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$ appartient à la droite $(AB)$.*

**Démonstration :** si $M = A$, la relation devient :

$$\alpha\overrightarrow{AA} + \beta\overrightarrow{AB} = (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG}$$

soit

$$\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG}$$

□

***Exercice résolu 2 :***

Soit $[AB]$ un segment, construire le barycentre $G$ de $(A, 3)$ et $(B, 2)$.

***Solution :*** Selon le théorème, on a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \\ &= \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

On place le point $G$ comme dans l'exercice résolu précédent.

## 1.3. Propriétés du barycentre

**Théorème 3 : Homogénéité**

*Le barycentre de deux points reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients par un même nombre non nul.*

**Démonstration :** Si $G$ est barycentre de $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$, alors $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. On peut mulitplier l'égalité par $k$, et on obtient : $k \times \alpha\overrightarrow{GA} + k \times \beta\overrightarrow{GB} = \vec{0}$. Cette dernière égalité indique que $G$ est aussi barycentre de $(A, k\alpha)$ et $(B, k\beta)$. □

*Exemple :* Soit $G$ le barycentre des points $(A, \frac{3}{4})$ et $(B, -\frac{1}{2})$, alors $G$ est aussi le barycentre des points $(A, 3)$ et $(B, -2)$

**Théorème 4 : Coordonnées du barycentre**

*Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; Y_B)$ deux points dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.*
*Le point $G$, barycentre des points $(A, \alpha)$ et $(B, \beta)$ a pour coordonnées*

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}\,;\frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}\right)$$

*Il existe une formule similaire pour des points de l'espace.*

**Démonstration :** On note $(x_G; y_G)$ les coordonnées du point $G$. En appliquant la formule du théorème 1 avec le point $O$, on obtient :

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$$

Cette égalité implique pour les coordonnées :

$$\begin{pmatrix} x_G \\ y_G \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}x_B y_B$$

□

**_Exercice résolu 3 :_**

Soient $A(1;3)$ et $B(4;1)$. Calculer les coordonnées de $G$, barycentre de $(A,-1)$ et $(B,2)$.

***Solution :*** Selon la formule indiquée plus haut, on a :

$$G\left(\frac{-1\times 1+2\times 4}{-1+2}\,;\,\frac{-1\times 3+2\times 1}{-1+2}\right)$$

$$G(7\,;-1)$$

## 2. Barycentre de 3 points et plus

Définition 2 :

*On appelle* ***barycentre*** *de trois points pondérés* $(A,\alpha)$ , $(B,\beta)$ *et* $(C,\gamma)$ *avec* $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ *le point* $G$ *tel que :*

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

*On note* $G$ : $bar\{(A;\alpha)\ ;\ (B;\beta)\ ;\ (C;\gamma)\}$.

Théorème 5 : Caractérisation du barycentre de 3 points

*Le point* $G$ *est le barycentre de trois points pondérés* $(A,\alpha)$ , $(B,\beta)$ *et* $(C,\gamma)$ *avec* $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ *si et seulement si, pour tout* $M$ *du plan, on a :*

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

*En prenant, en particulier* $M=A$, *on obtient :*

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

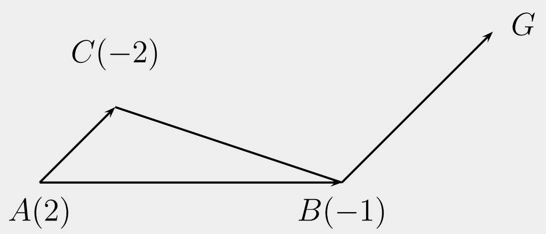
**Démonstration :** La démonstration est similaire à celle faite pour le barycentre de deux points. □

**Exercice résolu 4 :**

Soient $A$, $B$ et $C$, trois points du plan. Construire le barycentre $G$ de $(A, 2)$, $(B, -1)$ et $(C, -2)$.

***Solution :*** Selon la formule du théorème, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$




Théorème 6 : Coordonnées du barycentre

*Soient $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; Y_B)$ et $C(x_C; Y_C)$ trois points dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.*
*Le point $G$, barycentre des points $(A, \alpha)$, $(B, \beta)$ et $(C, \gamma)$ a pour coordonnées*

$$G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} ; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

*Il existe une formule similaire pour des points de l'espace.*

Théorème 7 : Associativité

*On ne change pas le barycentre de plusieurs points en remplaçant certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme (non nulle) des coefficients correspondants.*
*Autrement dit, si $G$ est le barycentre de $(A, \alpha)$ ; $(B, \beta)$ et $(C, \gamma)$ alors $G$ est aussi le barycentre de $(A, \alpha)$ et $(G', \beta + \gamma)$ où $G'$ est le barycentre de $(B, \beta)$ et $(C, \gamma)$.*

*Exemple :* Si $G = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2), (C, 3)\}$ alors $G = \text{bar}\{(G', 3), (C, 3)\}$ où $G' = \text{bar}\{(A, 1), (B, 2)\}$.
Et finalement, on s'aperçoit que $G$ est le milieu de $[G'C]$.