

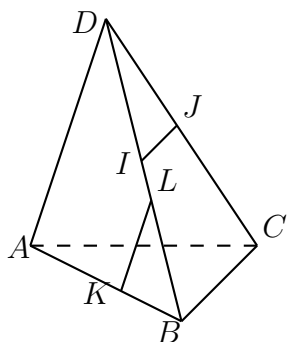
Line and Plane in 3D

À la fin de ce chapitre, vous devez :

- connaître les positions relatives concernant les droites et les plans
- savoir prouver les parallélismes potentiels.

5.1 $ABCD$ est un tétraèdre. Les points I, J, K et L sont respectivement sur les arêtes $[DB]$, $[DC]$, $[AB]$ et $[DB]$, la droite (IJ) étant parallèle à la droite (BC) et la droite (LK) parallèle à (AD) .

Compléter les phrases suivantes par « coplanaires et sécantes », « coplanaires et parallèles » ou « non coplanaires ».



1. Les droites (IJ) et (DC) sont ...
2. Les droites (IJ) et (LC) sont ...
3. Les droites (IJ) et (AB) sont ...
4. Les droites (IJ) et (KL) sont ...
5. Les droites (IK) et (DC) sont ...
6. La droite (IJ) et le plan (ABC) sont ...
7. La droite (IJ) et le plan (AKL) sont ...
8. Les plans (DAB) et (LDK) sont ...
9. Les plans (DAB) et (CIJ) sont ...

5.2 Let $ABCDEFGH$ be a cube with faces $ABCD$ and $EFGH$ and edges AE , BF , CG and DH . Let I, J, K, L, M be the respective midpoints of the edges AB , BC , BF , EF and FG .

1. (a) Find all the lines parallel to (IJ) .
 (b) Find all the lines coincident with (JK) that don't have J nor K in their names.
 (c) Find at least six lines coplanar with (KL) that don't have K nor L in their names.
 (d) Find at least six lines non coplanar with (LM) .
2. (a) Are the points I, K, M collinear? Explain your answer.
 (b) Are the points B, D, M collinear? Explain your answer.
 (c) Are the points I, J, K, B coplanar? Explain your answer.
 (d) Are the points K, M, C, G coplanar? Explain your answer.
 (e) Are the points A, C, L, M coplanar? Explain your answer.
3. (a) Find all the faces of the cube coincident with (KLM) .
 (b) Find all the planes parallel to (IJK) .

5.3 $ABCDEFGH$ est un cube dont $ABCD$ et $EFGH$ sont des faces et $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ sont des arêtes. Déterminer, si elle existe, l'intersection

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1. des plans (GHC) et (ABC) ; | 6. des plans (CDF) et (BHD) ; |
| 2. des plans (ABG) et (EFG) ; | 7. des plans (DEG) et (AFH) ; |
| 3. des plans (EFG) et (ABC) ; | 8. du plan (GHC) et de la droite (AD) ; |
| 4. des plans (GHC) et (ABC) ; | 9. du plan (BHD) et de la droite (CF) . |
| 5. des plans (AFC) et (ABD) ; | |

5.4 Consider a cuboid $ABCDEFGH$ such that $AB = 6\text{cm}$, $AE = 3\text{cm}$ and $AD = 4\text{cm}$. The face $ABFE$ will be drawn as the front face, in real size, with the edge BF on top. The length AD will measure 2.5cm on the picture. A 6cm space will be left empty on top of the figure.

The points I and J are the respective midpoints of the edges AB and DC . The points L and M are defined by the relations $\overrightarrow{BL} = 2\overrightarrow{BF}$ and $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CG}$.

1. Draw a precise picture.
2. Prove that the line segments EF and AL are coincident. Their intersection will be called K .
3. Use vectors to prove that K is the midpoint of EF and AL .
4. In the same way, what can you say about the intersection P of the line segments HG and DM ?
5. Compute the volume of the solid $ABLKEDCMPH$.

5.5 **Partie A**

Soit $ABCD A'B'C'D'$ un parallélépipède rectangle de base $ABCD$ et d'arêtes $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$, $[DD']$, dont la représentation en perspective cavalière vérifie $AB = 8\text{cm}$, $BC = 3.5\text{cm}$ et $AA' = 4\text{cm}$. On note I , J , I' et J' les milieux respectifs de $[AB]$, $[CD]$, $[A'B']$ et $[C'D']$. Dans chacune des questions on précisera clairement les propriétés utilisées.

1. Prouver que les droites (IJ) et (II') sont parallèles au plan (BCB') .
2. En déduire que le plan (IJJ') est parallèle à (BCB') .
3. Prouver que les droites (AD) et $(I'J')$ sont parallèles au plan (BCB') .
4. Peut-on déduire de la question précédente que les plans (ADI') et (BCB') sont parallèles? S'ils ne le sont pas, construire leur intersection.
5. Prouver que les plans $(A'DC)$ et (IJJ') ont un point commun. En déduire la nature de leur intersection puis la préciser explicitement.
6. Prouver que les droites (IC) et (JB) sont coplanaires et non parallèles. En déduire leur position relative.

Partie B

On note à présent K l'intersection de (IC) et (JB) et K' celle $(I'C')$ et $(J'B')$.

1. Prouver que K est le milieu de $[IC]$ et $[JB]$ et que K' est le milieu de $[I'C']$ et $[J'B']$. En déduire que la droite (KK') est parallèle aux plans $(II'B)$ et (CBB') .

2. Les droites (KC) et (DA') sont-elles coplanaires ?
Si oui, sont-elles sécantes et en quel point ?
3. Mêmes questions pour les droites (KI) et (AA') .
4. Mêmes questions pour les droites (KJ) et (BC') .
5. Mêmes questions pour les droites (KC') et (II') .
6. Mêmes questions pour les droites $(A'K)$ et (AJ) .

Partie C

Soit M un point quelconque du segment $[IJ]$.

1. Prouver que le plan $(KK'M)$ est sécant aux plans $(II'J)$ et (BCC') et construire les deux intersections, notées respectivement Δ et Δ' .
2. Prouver que Δ et Δ' sont parallèles.
3. Démontrer que (BB') est parallèle au plan $(KK'M)$.

5.6 Let $ABCDE$ be a regular square-based pyramid, with $ABCD$ its base. We note I , J and K the respective midpoints of the edges AE , BE and CE .

1. Prove that the lines IJ and DC are parallel.
2. Prove that the planes IJK and ABC are parallel.
3. Deduce from the previous question that the lines KK' et DC are parallel.
4. Find out the intersections of the plane IJK with the plane CDE and the lines DE .

5.7 $ABCDEFGH$ est un cube. I , J , K et L sont les milieux respectifs des segments $[AE]$, $[AB]$, $[BC]$, et $[CG]$.

1. Faire une figure.
2. (a) Montrer que le quadrilatère $AILC$ est un parallélogramme.
(b) Montrer que les droites (JK) et (AC) sont parallèles.
(c) En déduire que les droites (JK) et (IL) sont parallèles.
3. (a) Déduire de 2. que les droites (IJ) et (KL) sont coplanaires.
(b) Peuvent-elles être parallèles ? Expliquer.
(c) On note M leur point d'intersection.
Montrer que M appartient à la droite (BF) .

5.8 $SABCD$ est une pyramide de sommet S à base rectangulaire. Les points M et N sont respectivement sur les arêtes $[SA]$ et $[SB]$ tels que (MN) et (AB) sont parallèles.

1. Démontrer que (CD) et (MN) sont parallèles.
2. Dans le plan $(MNC D)$, les droites (DM) et (CN) se coupent en P .
(a) Expliquer pourquoi P appartient à la fois au plan (SAD) et au plan (SBC) .
(b) Quelle est la droite d'intersection de (SAD) et (SBC) ?
(c) En déduire que (SP) est parallèle à (BC) et à (AD) .

5.9 Soit un tétraèdre $ABCD$.

On note I , J , L et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$ et $[AL]$.

1. Démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (BCD) .
2. Démontrer que les plans (IJL) et (BCD) sont parallèles.
3. Déterminer le point d'intersection de la droite (JK) et du plan (BCD) .
4. Dessiner la droite $(\mathscr{D})$ intersection des plans (IJK) et (BCD) puis démontrer que les droites (IJ) et $(\mathscr{D})$ sont parallèles.
5. On note $\mathscr{P}$ le plan contenant la droite $(\mathscr{D})$ et le point L et on note $(\mathscr{D}')$ la droite d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (IJL) . Démontrer que les droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles.

5.10 Let $ABCD$ be a regular tetrahedron with I , J , K , L , M and N the respective midpoints of the edges AB , BC , CD , DA , AC and DB .

1. Draw a precise picture.
2. Prove that the lines IL and KJ are parallel to the same line. Deduce the incidence relation between these two lines.
3. Find out the nature of the quadrilateral $IJKL$.
4. Prove that $IN = \frac{1}{2}AD$ and find out the nature of the triangle IJN .
5. How many faces does the solid $IJKLMN$ have? Is it regular? What can you deduce about the nature of this solid.

Homework #10 – The greatest area

Consider a square $ABCD$, with side 8cm. The point B' is on the segment $[AB]$ and the points C' and D' form a smaller square $AB'C'D'$ inside of $ABCD$, with D' on $[AD]$. Consider now the triangle $BB'C'$ and the trapezium $DCC'D'$.

Find the position of B' for which the sum of the areas of the triangle and the trapezium is maximal.

Your method must be precisely explained, and can include graphs, tables or other elements, done with paper and pen or with a computer. Special care should be given to the quality of the language, which may be evaluated separately.