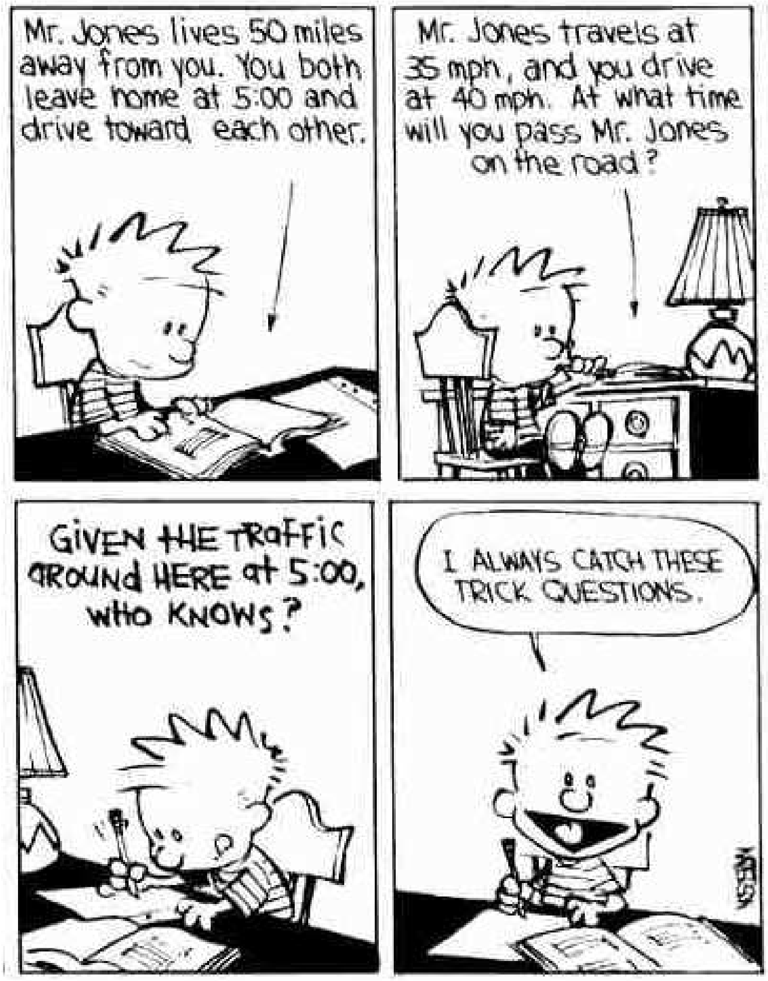
Seconde européenne
Exercices de mathématiques

Chapitre 8
Équations de droites
Line equations



Calvin and Hobbes, by Bill Waterson

À la fin de ce chapitre, vous devez être capable :
- de déterminer par le calcul l'équation cartésienne ou réduite d'une droite.
- de prouver qu'un point appartient à une droite.
- de tracer une droite dont l'équation est donnée.
- de déterminer graphiquement l'équation réduite d'une droite.
- de prouver ou d'infirmer le parallélisme de deux droites.

Aymar de Saint-Seine et Mickaël Védrine
Année scolaire 2011/2012

8.1 Soient $A(1;4)$ et $B(2;6)$ deux points du plan. On considère un point $M(x;y)$ du plan.
Le but de cette activité est de trouver une condition portant sur x et y telle que :
- si la condition est vérifiée par x et y alors le point M est sur la droite (AB) ;
- si la condition n'est pas vérifiée par x et y alors le point M n'est pas sur la droite (AB).

Partie A – Établissement de la propriété

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis celle de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et de y.

2. Recopier et compléter la phrase :
Le point M est sur (AB) si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\end{pmatrix}$ *sont* ...

3. En déduire une équation que doivent vérifier x et y.

4. Vérifier que cette équation est équivalente à $2x - y + 2 = 0$

Partie B : Utilisation de l'équation

Dans la première partie, nous avons établi une équation. Le raisonnement conduit aboutit à l'équivalence :

Le point $M(x;y)$ est sur (AB) si et seulement si
le couple $(x;y)$ est une solution de l'équation $2x - y + 2 = 0$.

Pour mieux comprendre cette équivalence, nous allons étudier quelques exemples.

1. **a.** Dans un repère, placer les points A et B puis tracer la droite (AB).
b. Placer un point M sur cette droite et lire ses coordonnées $(x_M; y_M)$.
c. Calculer $2x_M - y_M + 2$.
d. Les coordonnées du point M vérifient-elles l'équation de la droite ?

2. **a.** Placer un point N non situé sur (AB) et lire ses coordonnées $(x_N; y_N)$.
b. Calculer $2x_N - y_N + 2$.
c. Les coordonnées du point N vérifient-elles l'équation de la droite ?

3. **a.** Choisir une valeur quelconque de x.
b. Déterminer la valeur de y telle que $2x - y + 2 = 0$.
c. Placer le point dont l'abscisse est x et l'ordonnée y.
Ce point est-il sur la droite (AB) ?

4. **a.** Choisir une autre valeur quelconque de x.
b. Déterminer une valeur de y telle que $2x - y + 2 \neq 0$.
c. Placer le point dont l'abscisse est x et l'ordonnée y.
Ce point est-il sur la droite (AB) ?

Forme générale

8.2 Déterminer à l'aide de la méthode vue dans l'activité préparatoire (partie A), une équation de chacune des droites suivantes :

1. $(\mathscr{D}_1)$ passant par $A(0;1)$ et $B(2;3)$;
2. $(\mathscr{D}_2)$ passant par $A(1;-1)$ et $B(3;-7)$;
3. $(\mathscr{D}_3)$ passant par $A(1;4)$ et $B(1;7)$;
4. $(\mathscr{D}_4)$ passant par $A(2;3)$ et $B(5;3)$.

8.3 Dans le tableau ci-dessous, indiquer quels points appartiennent à quelle(s) droite(s).

	$A(-6;4)$	$B(1;4)$	$C(2;\frac{5}{2})$	$D(2;0)$	$E(-\frac{7}{2};\frac{5}{2})$	$F(-3;-2)$
$\Delta_1 : 3x-2y+5=0$						
$\Delta_2 : y=-\frac{1}{2}x+1$						
$\Delta_3 : x=2$						
$\Delta_4 : y=4$						

8.4 In this exercise, we will look at two different ways to use the equation of a line to draw it. In each case, we must find the coordinates of two points on the line.

Part A – Method 1

1. Consider the line of equation $2x+3y-6=0$.
   a. Find the value of y when $x=0$. Deduce the coordinates of a point on the line.
   b. Find the value of x when $y=0$. Deduce the coordinates of another point on the line.
   c. Draw the line.
2. Use this method to draw the line whose equations are given below.

$$3x+2y-6=0. \quad y=2x+1 \quad y=-x+3.2 \quad y=-4x$$

Part B – Method 2

A new figure will be done for this part.

1. Consider again the line of equation $2x+3y-6=0$.
   a. Recall the value of y when $x=0$. Deduce the coordinates of a point on the line.
   b. Choose another value of x, not too close to $x=0$, and compute the corresponding value of y. Deduce the coordinates of another point on the line.
   c. Draw the line
2. Use this method to draw the line whose equations are given below.

$$3x+2y-6=0. \quad y=2x+1 \quad y=-x+3.2 \quad y=-4x$$

3. Check that the lines drawn with the two methods are the same.

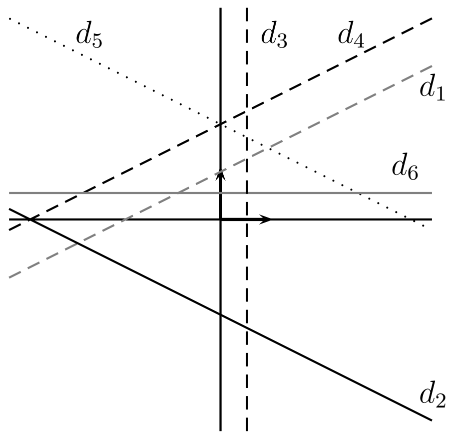
8.5 Tracer chacune des droites suivantes.

1. $\mathscr{D}_1$ d'équation $x - 2y + 4 = 0$;
2. $\mathscr{D}_2$ d'équation $2x - 2y - 6 = 0$;
3. $\mathscr{D}_3$ d'équation $-2y + 4 = 0$;
4. $\mathscr{D}_4$ d'équation $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1$;
5. $\mathscr{D}_5$ d'équation $x + y = 0$;
6. $\mathscr{D}_6$ d'équation $2x + 4 = 0$;
7. $\mathscr{D}_7$ d'équation $6x + 2y + 1 = 0$;
8. $\mathscr{D}_8$ d'équation $5x - y - 7 = 0$.

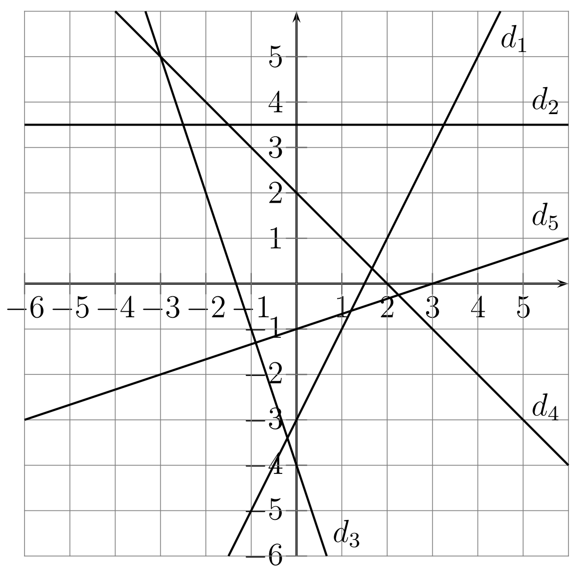
Équations réduites

8.6 Associer chacune des droites tracées ci-dessous avec son équation.

1. $y = 0.5x + 1.8$;
2. $y = -0.5x + 1.8$;
3. $y = 0.5$;
4. $y = 0.5x + 0.9$;
5. $x = 0.5$;
6. $y = -0.5x - 1.8$.



8.7 Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine, le coefficient directeur et l'équation réduite de chacune des droites tracées dans le repère ci-dessous.



8.8 On donne ci-dessous les équations réduites de six droites du plan.

$$y = 2x + 1 \quad y = -x + 3,2 \quad y = 4,7 \quad y = 2 - \frac{11}{3}x \quad y = -4x \quad x = 2,9$$

1. Pour chacune de ces équations de droites, donner l'ordonnée à l'origine et le coefficient directeur.
2. Sans faire de calcul, tracer les droites dans un même repère orthonormé $(O; I, J)$.

8.9 Consider the lines whose equations are given below.

$\mathscr{D}_1$: $-2x + y + 1 = 0$	$\mathscr{D}_4$: $2x - 6 = 0$	$\mathscr{D}_7$: $-y - x - 5 = 0$
$\mathscr{D}_2$: $x + y = -5$	$\mathscr{D}_5$: $6x = 3y + 3$	$\mathscr{D}_8$: $4x - 2y = -2$
$\mathscr{D}_3$: $3x + 3y + 15 = 0$	$\mathscr{D}_6$: $1 - \frac{1}{3}x = 0$	$\mathscr{D}_9$: $3y - 6x = -3$

1. Give the slope-intercept equation of each line.
2. Find out what equations represent the same line.
3. For each group of equations found in the previous questions, give the slope and the intercept of the line.

8.10 Déterminer une équation réduite de chacune des droites définies ci-dessous. Dans chaque cas, A et B sont des points de la droite, m est son coefficient directeur et p son ordonnée.

1. $A(2; 7)$ et $B(-1; -2)$
2. $A(4; -1)$ et $B(-6.2; -6.1)$
3. $A(11; -3)$ et $B(11; 5)$
4. $A(1; -2)$ et $B(7; -2)$
5. $A(\frac{7}{2}; \frac{17}{2})$ et $B(-4; 1)$
6. $m = -5$ et $A(-1; 10)$;
7. $m = \frac{2}{3}$ et $A(2; 3)$;
8. $p = -8$ et $A(\frac{2}{3}; 0)$;
9. $p = -\frac{5}{7}$ et $A(-3; -\frac{20}{7})$;

Parallélisme

8.11 Draw the lines whose equations are given below, then find out their slopes. What seems to be the link between these numbers and parallelism ?

$d_1 : y = 2x + 3$;	$d_3 : y = -0.5x + 2$;	$d_5 : 2y + 6x + 6 = 0$;
$d_2 : y = -3x - 1$;	$d_4 : 2x - y - 1 = 0$;	$d_6 : 1.5x + 3y + 3 = 0$.

8.12 Sans les tracer, regrouper toutes les droites dont les équations sont données ci-dessous en familles de droites parallèles.

$d_1 : y = -2x + 1$	$d_4 : y = 2x - 1$	$d_7 : y = 2x$	$d_{10} : y = \frac{1}{4}x + 1.5$
$d_2 : y = \frac{1}{4}x - 3$	$d_5 : y = -2x - 2$	$d_8 : y = 5$	$d_{11} : x = 5$
$d_3 : y = -3x - 2$	$d_6 : y = -3x + \frac{1}{2}$	$d_9 : y = -3x - 4$	$d_{12} : y = \frac{1}{4}x + 6$

8.13 En déterminant leurs coefficients directeurs, reconnaître dans la liste ci-dessous les droites parallèles.

$\Delta_1 : y = \frac{1}{3}x + 2$;
$\Delta_2 : y = -5x - 1$;
$\Delta_3 : 7y = -4x + 5$;
$\Delta_4 : x - 3y - 2 = 0$;
$\Delta_5 : 4y + 20x + 8 = 0$;
$\Delta_6 : -3.5y - 2x + 7 = 0$;
$\Delta_7 : \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}x + 7 = 0$;
$\Delta_8 : 35y + 20x = 12$.

8.14 Let d_0 be the line of equation $y = 3x - 2$. Find the equations of the lines described below.

1. d_1 is parallel to d_0 and has intercept 4.
2. d_2 is parallel to d_0 and passes through the point $(-1; 0)$.
3. d_3 has slope 2 and meets d_0 at point $(7; 19)$.
4. d_4 is parallel to the x-axis and has the same intercept as d_0.
5. d_5 never meets d_0 and is passing though the origin.

Intersections de droites

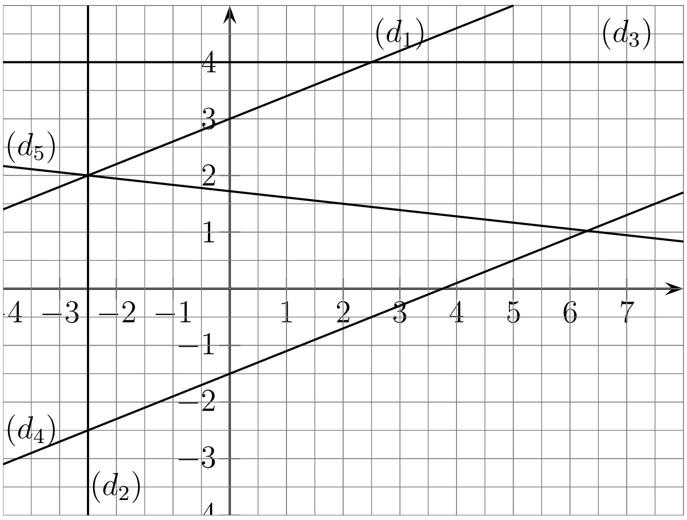
8.15 On considère le système : $\mathscr{S} \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + y & = & -1 \\ -5x + y & = & 2 \end{array} \right.$.

1. Donnez les équations réduites des droites associées à ce système.
2. A l'aide de la calculatrice graphique, tracez les droites et déduisez-en une approximation de la solution.
3. Vérifiez par le calcul que le couple obtenu est bien la solution exacte du système.

8.16 Déterminer à l'aide de la calculatrice une approximation des solutions de chacun des sytèmes suivants puis vérifier par le calcul les couples de solutions obtenus.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2x - 1 \\ y & = & \frac{1}{4}x + \frac{7}{2} \end{array} \right.$;
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 5x - 10 \\ y & = & x \end{array} \right.$;
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -41x + 3 \\ x & = & -1 \end{array} \right.$;
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 5x - 1 \\ y & = & 5x - 2 \end{array} \right.$;

8.17 Déterminer une équation de chacune des droites tracées ci-dessous, puis en déduire la résolution graphique de chacun des systèmes donnés.



1. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{2}{5}x + 3 \\ 2x + 5 & = & 0 \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{rcl} 4x - 10y & = & 15 \\ 2x + 18y & = & 31 \end{array} \right.$
3. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 4 \\ 2x + 5 & = & 0 \end{array} \right.$
4. $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & \frac{2}{5}x - \frac{3}{2} \\ 2x - 5y & = & -15 \end{array} \right.$

Applications

8.18 Let $ABCD$ be a square with side 1. The points I and J are the respective midpoints of the sides AB and AD. Let K be the intersection of the lines AC and BJ.
The aim of this exercise is to prove that the points D, K, I are collinear.

Part A – First method

Consider the coordinate system $(A; B, D)$.

1. Give the coordinates of the points A, B, C, D, I, J.
2. Find equations for the lines AC and BJ.
3. Compute the coordinates of the point K, intersection of lines AC and BJ.
4. Prove that the points D, K and I are collinear.

Part B – Second method

1. What are the lines AC and BJ in triangle ABD ?
2. Deduce that the points D, K and I are collinear.

8.19 Dans un repère, on considère quatre points $A(-4; 1)$, $B(2; 4)$, $C(1; 0)$, $D(-5; -3)$.

1. Tracer une figure et prouver que $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Soit I et J les milieu respectifs des côtés $[BC]$ et $[AD]$. Déterminer les coordonnées de ces points et placer les dans le repère.
3. La droite (AD) admet-elle une équation réduite ?
4. Déterminer les équations réduites des droites (AC) et (BD).
5. Déterminer les coordonnées du point K, intersection des droites (AC) et (BD).
6. En utilisant les vecteurs ; prouver que les points I, J et K sont alignés.
7. Prouver à nouveau cette propriété en utilisant l'équation réduite de la droite (IJ).
8. En utilisant les équations réduites, prouver que les droites (AB), (CD), (IK) et (JK) sont parallèles. En déduire une nouvelle preuve de l'alignement des points I, J et K.

8.20 In a plane coordinate system $(O; I, J)$, consider the points $A(-2, 1)$, $B(4, 3)$, $C(5, 0)$ and $D(-1, -2)$. The aim of this exercise is to study the quadrilateral $ABCD$. A figure will be drawn and completed all along the exercise

1. Check that A and B are on the line of equation $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$.
2. We admit that the slope of the line CD is $\frac{1}{3}$ and that its intercept is $-\frac{5}{3}$. Deduce its slope-intercept equation.
3. Find the slope-intercept equations of the lines AD and BC.
4. Deduce from the previous questions that the opposite sides in quadrilateral $ABCD$ are parallel. What does it mean about the quadrilateral itself ?
5. Compute some lengths to find out the nature of $ABCD$.

8.21 Un transporteur doit véhiculer 960 personnes. Il dispose de bus de 40 places et de bus de 60 places.

1. **a.** Si le transporteur n'utilise que des bus de 40 places, combien de bus doit-il prévoir ?

   b. Si le transporteur n'utilise que des bus de 60 places, combien de bus doit-il prévoir ?

2. Le transporteur utilise x bus de 40 places et y bus de 60 places.

   a. Déterminer une équation vérifiée par x et y.

   b. Tracer la droite correspondante dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

   c. Combien de bus de chaque sorte le transporteur doit-il prévoir ? Indiquer toutes les possibilités.

8.22 Deux sociétés louent une camionette aux conditions suivantes :

	Forfait journalier	Prix du km parcouru
Société A	92 €	0,14 €
Société B	50 €	0,40 €

1. Un client a 300 km à parcourir en trois jours. Quel est le tarif le plus avantageux ? Même question s'il a 600 km à parcourir en trois jours.

2. Soit x le nombre de kilomètres parcourus en trois jours et y le prix payé par le client.

   a. On appelle respectivement $f(x)$ et $g(x)$ les prix payés par le client s'il choisit les sociétés A et B. Exprimer $f(x)$ et $g(x)$ en fonction de x.

   b. Représenter graphiquement les deux fonctions f et g. (unités : 50 km/euros pour 1 cm sur chaque axe)

3. Soit M le point de d'intersection des deux droites.

   a. Déterminer graphiquement les coordonnées du point M.

   b. Vérifier algébriquement.

   c. Interpréter le résultat obtenu.

Homework #10

Some Euro students want to raise money for a school trip. Their idea it to sell buttons commemorating the school trip.

The number of buttons they can buy (the *supply*) and the number of buttons they can sell (the *demand*) depend on the price they sell each button. Indeed, if they sell the buttons at a low price, many people will want to buy them (high demand), but they won't be able to have a huge stock (low supply). On the contrary, if they sell the buttons at a high price, they will collect enough money to have a huge stock (high supply), but not many people will want to buy (low demand).

We admit that the supply and the demand are both affine functions of the selling price. One of the ways to solve this problem is to find the selling price for which the demand is exactly equal to the supply.
The values in the table below are known. The supply is computed from the button the Euro students have to pay themselves for the buttons, while the demand was estimated after a survey at their school.

Selling price of each button of each button	Number of buttons in stock (Supply)	Number of buttons students will buy (Demand)
£1.00	35	530
£2.00	130	400
£4.00	320	140

Part A – Using graphs

1. On a graph, with 1.5cm for 1 unit on the x-axis and 1.5cm for 100 units on the y-axis, plot points representing supply for each price in the table. Draw the line through the data points, and write *Supply* on this line.
2. Plot points representing the number of buttons requested (demand) for each selling price on the same graph. Draw the line through these points. Label this line *Demand*.
3. If the Euro students set the price at £2.50 per button, how many disappointed customers can they expect to have ? Explain how you got your answer.
4. If the Euro students set the price at £3.80 per button, how many unsold buttons can they expect to have left over ? Explain how you got your answer.
5. If they gave the buttons away at no charge, how many buttons would they need ? How does the graph help you determine your answer ?
6. What price would make the button supply so low that the number of available buttons would be zero ? How does the graph help you determine your answer ?
7. Estimate the price at which supply and demand will be in equilibrium. What is this price and how many buttons can they expect to sell ? How does the graph help you determine your answer ?

Part B – Using equations

1. Use the values in the table to find the equation for supply S as a function of price p.
2. In the same way, find the equation for demand D as a function of price p.
3. Use the supply and demand equations to find the price and the number of buttons that the Euro students should order for supply and demand to be in exact equilibrium. How does this price compare with your answer in last question of part A ?

Table of Contents

Related Episodes

Yes, we have to divide up our time like that, between our politics and our equations. But to me our equations are far more important, for politics are only a matter of present concern. A mathematical equation stands forever.

Albert Einstein

Someone told me that each equation I included in the book would halve the sales.

Stephen Hawking

It seems that if one is working from the point of view of getting beauty in one's equations, and if one has really a sound insight, one is on a sure line of progress.

Paul Dirac

More ressources on
http://lyceeenligne.free.fr/
http://sectioneurosens.free.fr/