Chapitre VII
Équations de droites

26 mars 2012

Table des matières

1. Équations cartésiennes de droites dans le plan

1.1. Forme générale

Définition 1 : Equation cartésienne

*Soit M un point quelconque du plan, de coordonnées $(x; y)$. On appelle **équation cartésienne** de la droite (AB) toute égalité faisant intervenir x et y qui soit vraie si et seulement si le point M est sur la droite.*

Théorème 1 : Equation d'une droite

Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des nombres réels.

Démonstration : Soient Δ une droite du plan, $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts sur Δ et leurs coordonnées dans le plan.

$$\begin{aligned} M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires} \\ &\Leftrightarrow \quad (x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x(y_B - y_A) - y(x_B - x_A) - x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A) = 0 \end{aligned}$$

En posant $a = (y_B - y_A)$, $b = -(x_B - x_A)$ et $c = -x_A(y_B - y_A) + y_A(x_B - x_A)$, on obtient bien une équation

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$

□

Note

In a plane coordinate system, any line has not only an equation in the general form $ax + by + c = 0$ but an infinity. Indeed, if $2x + 3y + 4 = 0$ is an equation for a line, $4x + 6x + 8 = 0$ is another equation for the same line.

Méthode :

Deux méthodes sont à retenir de l'activité préparatoire :

1. *Déterminer la forme générale de l'équation cartésienne d'une droite à partir de la donnée de deux points.*
2. *Déterminer par le calcul, si un point donné appartient ou non à une droite dont l'équation est donnée.*

1.2. Equation réduite

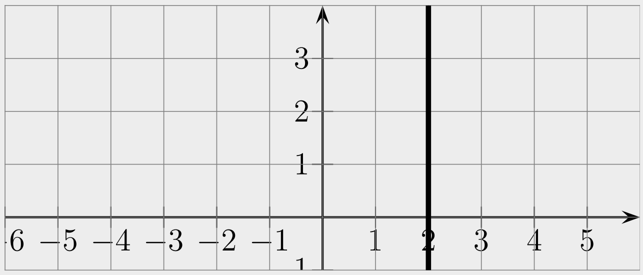
La forme générale de l'équation d'une droite donne peu de renseignements sur celle-ci. Nous allons voir une autre façon d'écrire l'équation d'une droite qui fournit plus d'indications sur les caractéristiques de celle-ci.

Théorème 2 : Equation d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées

Toute droite du plan parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation cartésienne de la forme $x = k$.

Démonstration : On sait que la droite admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c = 0$ avec $b = -(x_B - x_A)$. Comme la droite est parallèle à l'axe (Oy), on a $x_A = x_B$ donc $b = 0$ et la relation (1) s'écrit alors $ax + c = 0$. Les points A et B étant distincts, $a = y_B - y_A \neq 0$ donc une autre équation cartésienne est $x = -\frac{c}{a}$, qui est bien de la forme annoncée. □

Illustration :



L'équation de la droite ci-dessus est $x = 2$.

Théorème 3 : Equation d'une droite non parallèle à l'axes des ordonnées

Toute droite du plan non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres. Une telle écriture est appelée ***équation réduite*** *et est unique pour chaque droite.*

Slope-intercept form

Any line not parallel to the y-axis has a unique equation of the form $y = mx + p$. The number m is called the *slope* of the line and the number p its *intercept*, or more precisely the *y-intercept*.

Démonstration : On sait que la droite admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c = 0$ soit $by = -ax - c$. Puisqu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées et que A et B sont distincts, on a que $b = -(x_B - x_A) \neq 0$. La droite admet donc aussi pour équations $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$.
En posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$, la dernière équation est bien de la forme annoncée.
L'unicité est admise. □

Intercept form

An interesting form of equation is used in English. It's called the *intercept* form. If we modify the general equation of a line to get an equation of the form $\frac{x}{q}+\frac{y}{p}=1$ then the real numbers q and p are respectively the x-intercept and the y-intercept of the line.

Exercice résolu 1 :

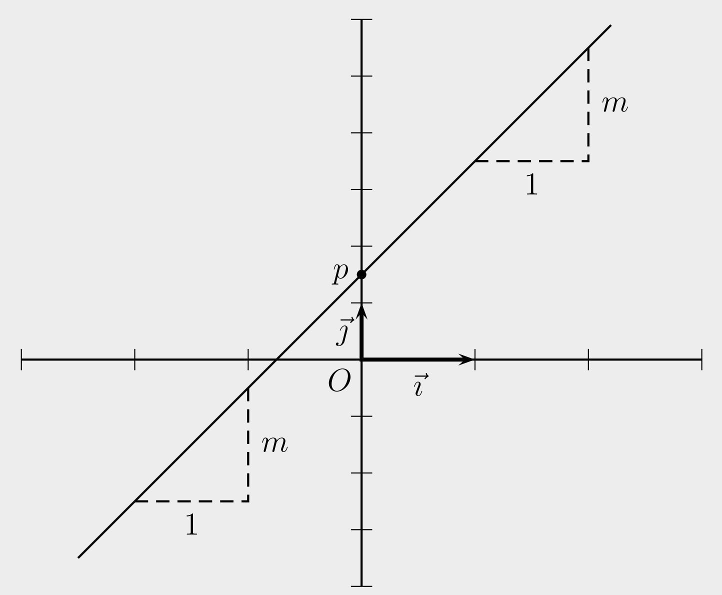
Soit $(\mathscr{D})$ la droite d'équation cartésienne $-4x+2y+2=0$. Donner l'équation réduite de $(\mathscr{D})$.

Solution : $-4x+2y+2=0$ donc $2y=4x-2$ d'ou $y=2x-1$.

Définition 2 : Ordonnée à l'origine - Coefficient directeur

Dans les conditions du théorème précédent, le nombre p est appelé ***ordonnée à l'origine.*** *C'est l'ordonnée du point de la droite dont l'abscisse est nulle.*
Le nombre m est appelé ***coefficient directeur*** *de la droite. Il indique la "pente" de la droite. Plus précisément, si deux points de la droite ont des abscisses dont la différence est égale à 1, la différence de leurs ordonnées est m.*

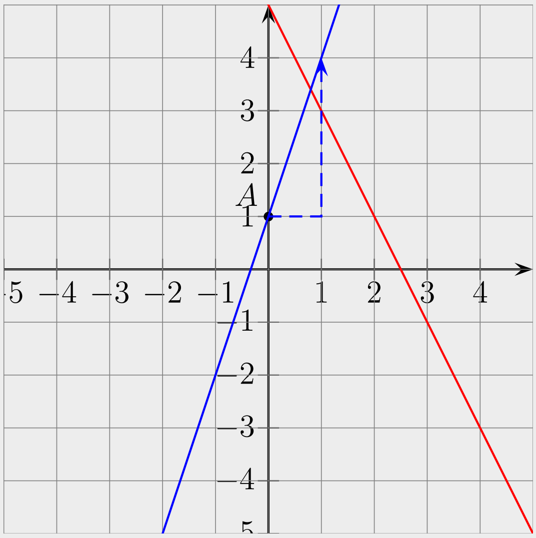
Illustration :



Exercice résolu 2 :

Sur le graphique ci-dessous :

1. Tracer la droite d'équation $y = 3x + 1$
2. Déterminer graphiquement l'équation de la droite tracée.



Solution :

1. L'ordonnée à l'origine est 1 donc la droite passe par $A(0; 1)$.
   Le coefficient directeur est de 3, donc si on avance d'une unité en abscisse, on augmente de trois unités en ordonnées. On effectue ce déplacement à partir du point A pour obtenir un deuxième point.
2. L'ordonnée à l'origine est de 5 donc $b = 5$.
   Si on se déplace d'une unité en abscisse, la droite descend de 2 unités donc $a = -2$.
   L'équation de la droite est donc $y = -2x + 5$.

How to draw a line

To draw a line, use its equation to find the coordinates of two points. Finding the coordinates of a third point is a good method to check.

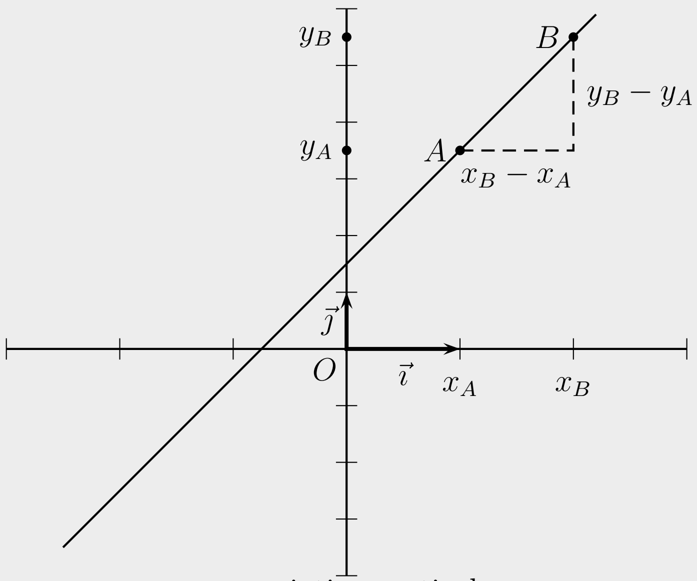
Théorème 4 : Coefficient directeur par le calcul

Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts d'une même droite $(\mathscr{D})$ non parallèle à $(0y)$. On a

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Démonstration : Selon la démonstration précédente $m = -\frac{a}{b}$, avec $a = (y_B - y_A)$, $b = -(x_B - x_A)$ (voir première démonstration de ce cours) d'où le résultat énoncé. $\square$

Illustration :



$$m = \text{ pente } = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercice résolu 3 :

Déterminer l'équation réduite de la droite $(\mathscr{D})$ passant par $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$

Solution : $x_A \neq x_B$ donc la droite $(\mathscr{D})$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a donc pour équation $y = mx + p$.

Calcul de m : $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5+1}{-1-2} = -2$

Calcul de p : $(\mathscr{D})$ passe par le point $A(2; -1)$ $\Leftrightarrow y_A = mx_A + p$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow y_A = -2x_A + p \\ &\Leftrightarrow -1 = -2 \times 2 + p \\ &\Leftrightarrow p = 3 \end{aligned}$$

la droite $(\mathscr{D})$ a pour équation réduite $y = -2x + 3$.

Méthode :

Trois méthodes sont à retenir du module 1 :

1. *Comment tracer la représentation graphique d'une droite à partir de son équation ;*
2. *Comment tracer la représentation graphique d'une droite à partir de l'ordonnée à l'origine et de son coefficient directeur.*
3. *Comment déterminer l'équation réduite d'une droite $\mathcal{D}$ passant par deux points de coordonnées données ;*

2. Positions relatives et équations de droites

2.1. Parralélisme

Théorème 5 : droites parallèles

Deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficients directeurs.

Parallel lines

Two lines are parallel when they have the same slope.

Démonstration : Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même direction donc si et seulement elles ont même coefficient directeur. □

2.2. Intersection de deux droites

Soient $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ deux droites d'équations respectives $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.
Un point $M(x; y)$ est à l'intersection de deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ si et seulement si ses coordonnées vérifient simultanément les équations de $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$, autrement dit si et seulement si $(x; y)$ est solution du système $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & ax+b \\ y & = & a'x+b' \end{array}\right.$.

Exercice résolu 4 :

Déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ d'équations respectives $y = 3x + 2$ et $y = 6x + 1$.

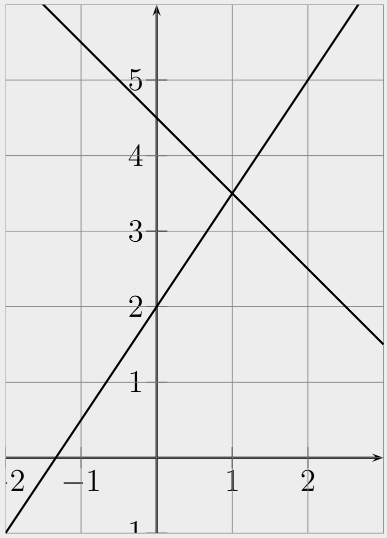
Solution : $M(x_M; y_M)$ est à l'intersection de deux droites $(\mathscr{D})$ et $(\mathscr{D}')$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{lcl} y_M & = & 3x_M+2 \\ y_M & = & 6x_M+1 \end{array}\right.$.
Par soustraction des lignes, on obtient $0 = (3x_M + 2) - (6x_M + 1)$ soit $0 = -3x_M + 1$ donc $x_M = \frac{1}{3}$.
On remplace x_M par sa valeur dans une des deux équations pour obtenir la valeur de y_M. On obtient $y_M = 3 \times \frac{1}{3} + 2 = 3$.
Le point M a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; 3)$.

Remarque : On a utilisé un sytème pour trouver le point d'intersection. On procède parfois à l'envers, c'est à dire que l'on détermine par lecture graphique les coordonnées des points d'intersection pour avoir une approximation du système d'équation correspondant.

Exercice résolu 5 :

Résoudre le système : $\left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y & = & 4 \\ 2x+2y & = & 9 \end{array}\right.$.

Solution : Le système est équivalent à $\left\{\begin{array}{rcl} y & = & \frac{3}{2}x+2 \\ y & = & -x+\frac{9}{2} \end{array}\right.$.
On trace donc les droites d'équations respectives : $y=\frac{3}{2}x+2$ et $y=-x+\frac{9}{2}$.



Par lecture graphique, le couple $(1;\frac{7}{2})$ **semble être** la solution du système.
On vérifie en remplaçant x par 1 et y par $\frac{7}{2}$ dans le système.

$$\left\{\begin{array}{rcl} -3x+2y & = & -3\times 1+2\times\frac{7}{2}=4 \\ 2x+2y & = & 2\times 1+2\times\frac{7}{2}=9 \end{array}\right.$$

Les deux équations étant vérifiées, le couple $(1;\frac{7}{2})$ **est** la solution du système.

2.3. Droite et demi-plans

Par définition, dire que $ax+by+c=0$ est une équation d'une droite Δ signifie que
- un point est sur Δ si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation ;
- un point n'est pas sur Δ si et seulement si ses coordonnées ne vérifient pas l'équation.

Les points qui ne sont pas sur la droite peuvent de plus être séparés en deux parties du plan distinctes, grâce à la propriété suivante.

Proposition 1 :

Une droite Δ sépare le plan en deux demi-plans, dont la droite elle-même est la frontière. Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de la droite, alors pour tous points situés du même côté de la droite, l'expression $ax+by+c$ est du même signe. Elle est positive d'un côté de la droite, s'annule sur la droite et est négative de l'autre côté.

Exemple : La droite d'équation $-3x - y + 1 = 0$ sépare le plan en deux demi-plans. Pour tout point de coordonnées $(x; y)$ situé du même côté que O, $-3x - y + 1 > 0$ et pour tout point situé de l'autre côté, $-3x - y + 1 < 0$. La frontière entre ces deux zones est la droite, l'ensemble des points tels que $-3x - y + 1 = 0$.

Illustration :