Chapitre VI
Vecteurs et coordonnées
Vectors and coordinates

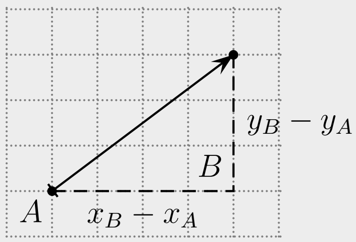
1. Vecteurs et coordonnées

Proposition 1 : Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$

Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère $(O; I, J)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

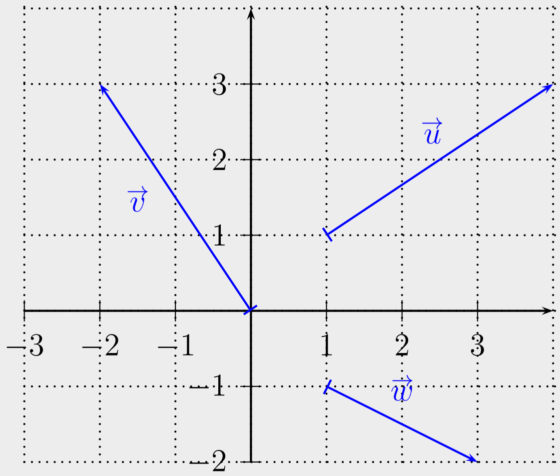
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Illustration : $\overrightarrow{AB}$



Exercice résolu 1 :

Lire les coordonnées des vecteurs de la figure suivante :



Solution : $\vec{u}$ a pour origine $A(1; 1)$ et pour extrémité $B(4; 3)$ donc ses coordonnées sont $\vec{u}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, ce qui pouvait se lire directement sur le graphique. En faisant de même, on trouve $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 2 : Opérations et coordonnées

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère et k un réel

- **Egalité de deux vecteurs :**
  Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales

$$\vec{u}=\vec{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

- **Somme de deux vecteurs :**
  Le vecteur $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$
- **Produit d'un vecteur par un réel :**
  Le vecteur $\vec{w}=k\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{w}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$

Exercice résolu 2 :

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}5x\\x+y\end{pmatrix}$.

1. Déterminer les coordonées de $\vec{u}+\vec{v}$;
2. Déterminer les coordonées de $-\vec{u}$;
3. Déterminer les coordonées de $5\vec{v}$;
4. Déterminer les coordonées de $-\vec{u}+5\vec{v}$;
5. Déterminer x et y pour que $\vec{v}=\vec{w}$.

Solution :

1. $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1+5\\-3+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$
2. $-\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$
3. $5\vec{v}\begin{pmatrix}5\times 5\\5\times 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25\\15\end{pmatrix}$
4. $-\vec{u}+5\vec{v}\begin{pmatrix}-1+25\\3+15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\18\end{pmatrix}$
5. $\vec{v} = \vec{w} \leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ x+y = 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$

Théorème 1 : Colinéarité

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'-x'y=0$.

Preuve. On démontrera seulement $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaire implique $x'y-y'x=0$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deuc vecteurs colinéaires.
Il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$ donc $\vec{u}$ et $k\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.
Or $k\vec{v}$ a pour coordonnées $(kx';ky')$ donc $x=kx'$ et $y=ky'$.
On en déduit que $xy'-yx'=x(ky)-y(kx)=kxy-kxy=0$. □

Définition 1 : Déterminant

La quantité $xy'-yx'$ est appellé le **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Exercice résolu 3 :

1. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\12\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?
2. Les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

Solution :

1. $6\times 12-(-8)\times(-9)=72-72=0$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
2. $2\times 7-(-3)\times(-6)=14-18=-4\neq 0$ donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

Exercice résolu 4 :

Dans un repère $(O;I,J)$, on a $A(4;2), B(3;\dfrac{7}{2}), C(1;\dfrac{5}{2})$ et $D(1;\dfrac{1}{2})$.
Démontrer que ABCD est un trapèze.

Solution : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}x_D-x_A\\y_D-y_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}x_C-x_B\\y_C-y_B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$

$-3\times(-1)-(-2)\times(-\frac{3}{2})=3-3=0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont donc colinéaires.
Ainsi les droites (AD) et (BC) sont parallèles donc ABCD est un trapèze.

Exercice résolu 5 :

Dans le repère $(O;I,J)$, on considère les points $A(-1;5)$, $B(0;3)$ et $C(2;-1)$.
Montrer que les points A,B et C sont alignés.

Solution : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AB}$ (ou on calcule le déterminant :$1\times(-6)-3\times(-2)=0$)
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc les points A,B et C sont alignés.