# Chapitre IV
# Probabilités – Probabilities

20 novembre 2010

## 1. Table des matières



*Le mot hasard vient de l'arabe al zahr qui désigne un dé à jouer.*
*Les jeux de hasard sont connus depuis la plus haute antiquité. Déjà les romains et les grecs jouaient aux osselets (des astragales).*
*C'est l'étude des jeux de hasard qui a conduit Blaise Pascal (1623 - 1662) à s'intéresser au calcul de probabilité.*

## 2. Vocabulaire

Le tableau ci-dessous résume les définitions et notations importantes relatives à la notion d'expérience aléatoire.
Pour les exemples, on considère l'expérience consistant à lancer un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 et à noter le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

| DÉFINITIONS | EXEMPLES |
|---|---|
| Une **expérience aléatoire** est une expérience liée au hasard dont on ne peut pas prévoir le résultat à l'avance. | Lancer un dé est une expérience aléatoire. |
| On peut cependant connaître les **issues** possibles, appelées **éventualités**. | Obtenir le chiffre 2 est une des éventualités. |
| L'ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire est appelé **univers**. En général, on note cet ensemble $\Omega$. | L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ |
| **Événement :** | |
| Un **événement** est une partie (ou un sous-ensemble) de l'univers $\Omega$. Il est constitué d'une ou d'un ensemble d'éventualités. | L'événement $A$ : « obtenir un nombre pair » est composé de 3 éventualités. On note $A = \{2; 4; 6\}$. |
| Lorsqu'une éventualité $e$ appartient à un événement $A$, on dit que $e$ **réalise** $A$. | L'éventualité $\{2\}$ réalise l'événement $A$ . |
| **Événement particulier :** | |
| Un évènement **impossible** est un événement qui ne se réalise jamais. | L'événement $B$ : « obtenir 7 » est impossible. On note $B = \varnothing$. |
| Un évènement **certain** est un événement qui se réalise toujours. | L'événement $C$ : « obtenir un nombre plus grand que 0 » est certain. On a $C = \Omega$. |
| Un **évènement élémentaire** est constitué que d'une seule issue. | L'événement $D$ : « obtenir le nombre 3 » ; $D = \{\ 3\ \}$ |
| L'évènement **contraire** ou **complémentaire** de $A$ est consitué de l'ensemble des issues qui ne réalisent pas $A$. On le note $\overline{A}$. | $\overline{A} = \{1; 3; 5\}$ |

**Events and probabilities**

In a **random experiment**, the **probability** of an **event** is the numerical measure of the chance of the event to **occur**.
The **complement** of any event $A$ is the event $\overline{A}$. It is made of all the **outcomes** such that $A$ does not occur. The event $A$ and its complement $\overline{A}$ are mutually exclusive and exhaustive.

# 3. Probabilité

**Théorème 1 : Loi des grands nombres**

Si l'on repète une expérience aléatoire un très grand nombre de fois, la fréquence de n'importe quel évènement finit par se stabiliser autour d'un nombre que l'on appelle la **probabilité** de cet évènement.

*Exemple :* Si on lance un très grand nombre de fois un dé, la fréquence d'apparition du 5 tend à se stabiliser à $\frac{1}{6}$.

**Définition 1 : Loi de probabilité**

**Définir une loi de probabilité** sur un univers, c'est associer à chaque éventualité $x_i$ sa probabilité $p_i$.
Lorsque toutes les issues ont la même probabilité, la loi est dite **équi-répartie**. On dit aussi que l'on a **équiprobabilité** des issues.

**equally likely**

When all the outcomes are **equally likely**, the probability of the occurence of a given outcome is defined as the number of cases favorable for the event over the total number of possible outcomes.

*Exemple :* Loi de probabilité du lancé d'un dé à 6 faces :

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Toutes les issues ont même probabilité. La loi est équi-répartie.

**Théorème 2 :**

La **probabilité d'un évènement** $A$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires qui constituent $A$.

*Exemple :* On jette un dé à six faces équilibré. On considère l'événement $A$ : « obtenir un nombre pair ».
L'événement $A$ est constitué des événements élémentaires $\{2\}$ ; $\{4\}$ et $\{6\}$. On a donc

$$p(A) = p(\{2\}) + p(\{4\}) + p(\{6\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

De même,
- la probabilité de ne pas obtenir 2 est $\frac{5}{6}$ ;
- la probabilité d'obtenir un chiffre pair est $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ;
- la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 9 est 1 ;
- la probabilité d'obtenir un résultat négatif est 0.

**Théorème 3 :**

Soit $A$ un évènement. On a :
- $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$. En particulier, $p(\varnothing) = 0$ et $p(\Omega) = 1$ ;
- $p(A) + p(\overline{A}) = 1$. En particulier, $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- De plus, si la loi est équi-répartie, on a

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombres d'issues possibles}}$$

**Preuve.** Quels que soient l'expérience aléatoire et l'événement $A$, il est certain que l'un des évéments $A$ et $\overline{A}$ se réalisera. Par conséquent $p(A)+p(\overline{A}) = 1$. On en déduit que $p(\overline{A}) = 1-p(A)$.□

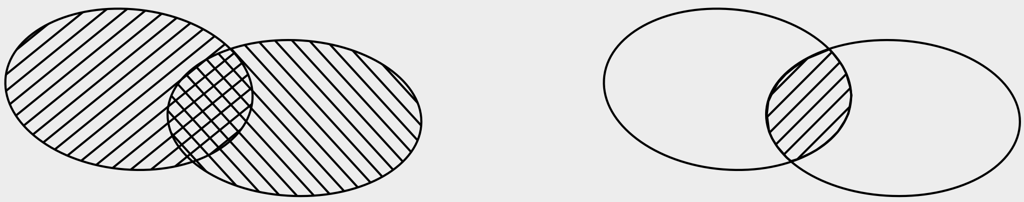
## 4. Calculs de probabilités

**Définition 2 : Intersection – Union**

L'**Intersection** des évènements $A$ et $B$ est l'évènement, noté $A \cap B$, formé des issues qui réalisent à la fois (simultanément) l'évènement $A$ et l'évènement $B$.
La **Réunion** des évènements $A$ et $B$ est l'évènement, noté $A \cup B$, formé des issues qui réalisent l'évènement $A$ ou l'évènement $B$, c'est à dire au moins l'un des deux.

**Illustration :**

On peut représenter graphiquement l'union et l'intersection de deux événements par un diagramme de Venn :



Union de deux événements — Intersection de deux événements

*Exemple :* On note $A$ l'événement "obtenir un chiffre pair" et $B$ l'événement "obtenir un chiffre strictement inférieur à quatre".
On a : $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4\}$
- $A \cap B$ = "obtenir un chiffre pair et inférieure strictement à six" : $A \cap B = \{2\}$ ;
- $A \cup B$ = "obtenir un chiffre pair ou inférieur strictement à six" : $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$.

**Union and intersection**

The *union* of two events $A$ and $B$ is made of all the outcomes such that at least one of the events $A$ or $B$ occurs. Their intersection is made of all the outcomes such that both $A$ and $B$ occur.

**Théorème 4 :**

Soit $A$ et $B$ deux évènements. on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

**Preuve.** On comprend facilement cette proposition en observant les diagrammes de Venn. Si l'on additionne les probabilités de $A$ et $B$, on compte deux fois la probabilité de $A \cap B$. Pour obtenir celle de $A \cup B$, il faut donc soustraire une fois $p(A \cap B)$. □

# 5. Programmes

## Rappel des notions vues lors des années précédentes

### Classe de troisième

**Notion de probabilité**

- Comprendre et utiliser des notions élémentaires de probabilité.
- Calculer des probabilités dans des contextes familiers.

La notion de probabilité est abordée à partir d'expérimentations qui permettent d'observer les fréquences des issues dans des situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes,etc.).

La notion de probabilité est utilisée pour modéliser des situations simples de la vie courante. Les situations étudiées concernent les expériences aléatoires à une ou à deux épreuves.

## Programme de seconde

**Probabilité sur un ensemble fini :**

Probabilité d'un événement.

- Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité.
- Utiliser des modèles définis à partirde fréquences observées.

*La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.*

Réunion et intersection de deux événements.

- Connaître et exploiter la formule $p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B)$.

*Pour les calculs de probabilités, on utilise des arbres, des diagrammes ou des tableaux.*