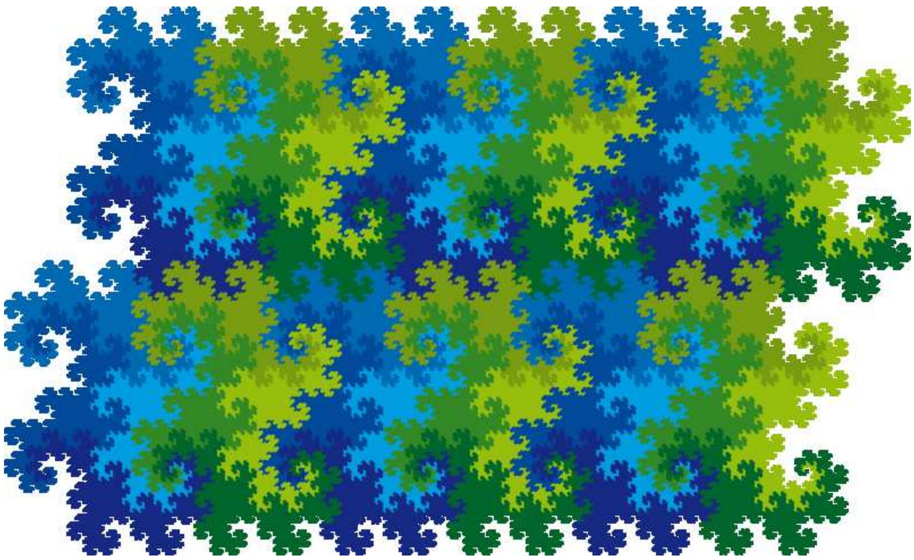
Seconde européenne
Exercices de mathématiques

Chapitre 3
Vecteurs
Vectors



Pavage du plan par translation de la fractale du dragon

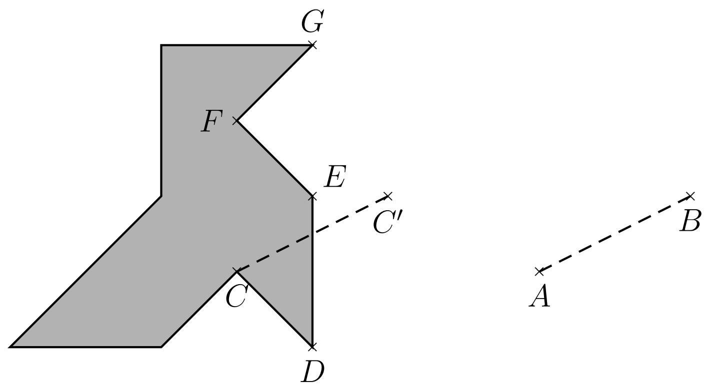
A la fin de ce chapitre, vous devez être capable de :
- représenter une combinaison linéaire de deux vecteurs ;
- utiliser la relation de Chasles ;
- utiliser la colinéarité pour prouver le parrallélisme ou l'alignement ;

Aymar de Saint-Seine et Mickaël Védrine
Année scolaire 2010/2011

Translation et vecteurs

$\boxed{\textbf{3.1}}$ En mathématiques, une *translation* est une transformation géométrique qui correspond à l'idée intuitive de « glissement » d'un objet, sans rotation, retournement, ni déformation de cet objet.

1. Sur la figure ci-dessous, on a construit l'image C' du point C par la *translation* qui transforme A en B. En observant la figure, proposer une construction simple du point C'.
2. En utilisant la méthode précédente, construire les images de D, E et F par la même translation.
3. Construire de même l'image de la cocotte par la translation qui transforme A en B.



$\boxed{\textbf{3.2}}$ On s'intéresse à l'algorithme ci-dessous :

begin
- **Input**: (x_A, y_A), (x_B, y_B), (x_C, y_C) coordinates of three points;
- $\dfrac{x_A + x_C}{2} \to x_I$;
- $\dfrac{y_A + y_C}{2} \to y_I$;
- $2x_I - x_B \to x_D$;
- $2y_I - y_B \to y_D$;
- **Output**: (x_D, y_D) ;

end

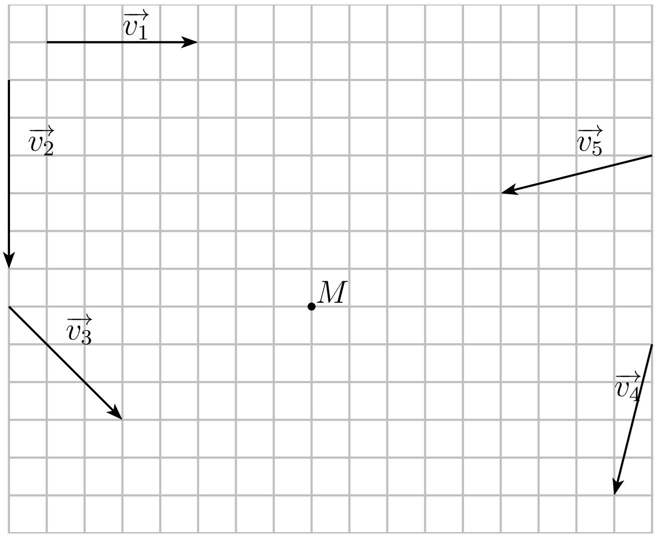
1. Appliquer cet algorithme dans chacun des cas suivants :

$$A(2;-1) \quad ; \quad B(-3;1) \quad ; \quad C(5;4)$$

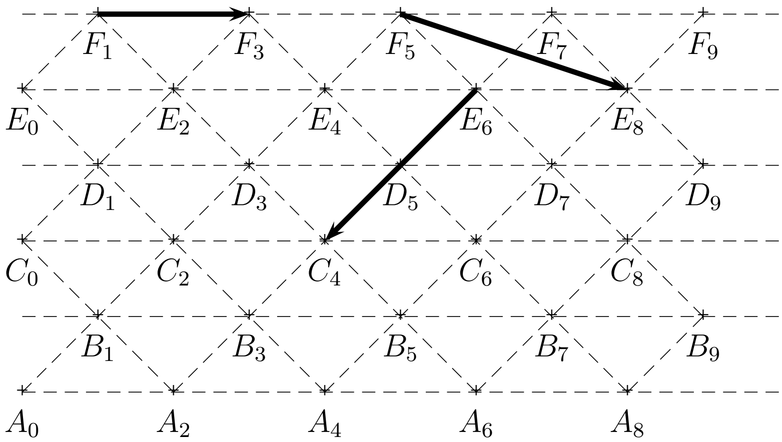
$$A(2;2) \quad ; \quad B(-4;6) \quad ; \quad C(-1;3)$$

2. Tracer un repère orthonormé et placer dans chacun des cas les points A, B, C et D.
3. Quel semble être le rôle de cet algorithme ?

3.3 Construire à l'aide du quadrillage les points M_1, M_2, M_3, M_4, et M_5, images respectives de M par les translations de vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$, et $\overrightarrow{v_5}$.



3.4 On considère la figure suivante, composée de triangles isométriques :



1. Par la translation qui transforme F_1 en F_3 :

- **a.** Quelle est l'image du point E_2 ? du point D_5 ?
- **b.** Quel est l'antécédent du point F_5 ? du point C_6 ?

2. Par la translation qui transforme E_6 en C_4 :

- **a.** Quelle est l'image du point E_2 ? du point D_5 ?
- **b.** Quel est l'antécédent du point A_0 ? du point C_6 ?

3. Par la translation qui transforme F_5 en E_8 :

- **a.** Quelle est l'image du point E_4 ? du point D_5 ?
- **b.** Quel est l'antécédent du point D_3 ? du point A_8 ?

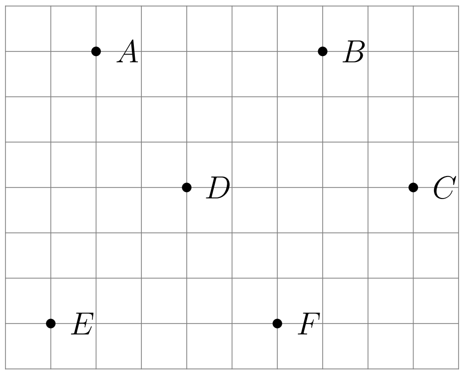
3.5 On s'intéresse à l'algorithme ci-dessous :

```
begin
  Input: (x_M, y_M) coordinates of a point ;
  x_M + 2 → x_M' ;
  y_M + 3 → y_M' ;
  Output: (x_M', y_M') ;
end
```

1. Appliquer cet algorithme à chacun des points suivants :
$$A(1;2) \quad ; \quad B(-2;2) \quad ; \quad C(2;-3)$$
2. Placer les points A, B, C ainsi que les points A', B', C' dans un repère orthonormé.
3. Quel semble être le rôle de cet algorithme ?

3.6 Use the graph to check if the following answers are true or false.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$
6. $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$



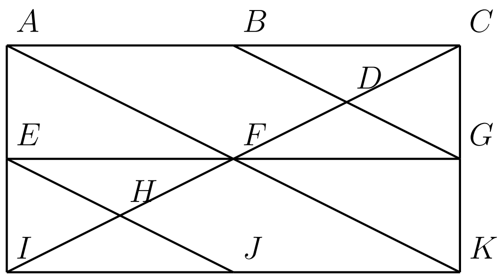
3.7 With the same picture :

1. Give two vectors equal to $\overrightarrow{DB}$.
2. Give three vectors opposite to $\overrightarrow{AB}$.
3. Plot the point G such that $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$.

3.8 Let $ACKI$ be a rectangle where B, G, J are E are the midpoints of segments AC, CK, KI and IA.

Give (without any explanation) :

1. all the vectors equal to $\overrightarrow{AB}$;
2. all the vectors equal to $\overrightarrow{FK}$;
3. all the vectors equal to $\overrightarrow{CD}$;
4. all the vectors equal to $\overrightarrow{IE}$;
5. all the vectors equal to $\overrightarrow{HC}$.



3.9 Soient A et B deux points quelconques.

1. Déterminer l'ensemble des points M tels que $||\overrightarrow{AM}|| = 3$.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $||\overrightarrow{AM}|| = ||\overrightarrow{MB}||$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $||\overrightarrow{AM}||^2 + ||\overrightarrow{MB}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2$.

3.10 Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point sur la diagonale $[BD]$.

1. Construire les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AM}$.
2. Trouver deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AD}$ et justifier ces égalités. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $MBCE$?
3. Trouver deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ et justifier ces égalités. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $MDCF$?
4. Démontrer que les points E, C et F sont alignés.

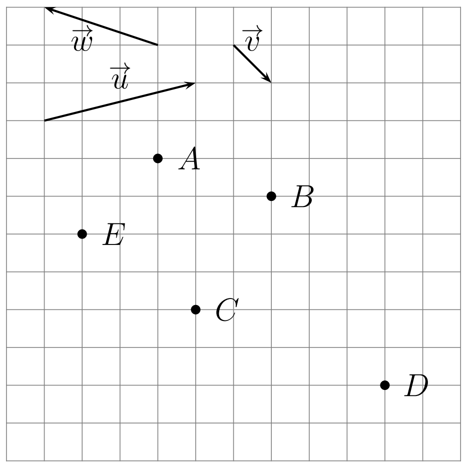
3.11 Soient ABC et EFG deux triangles quelconques.

1. Construire le triangle $A'B'C'$, image de ABC par la translation de vecteur $\overrightarrow{EF}$.
2. Construire le triangle $A''B''C''$, image de $A'B'C'$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{FG}$.
3. Par quelle transformation le triangle $A''B''C''$ est-il l'image de ABC ?
4. Par quelle transformation le triangle ABC est-il l'image de $A'B'C'$?
5. Par quelle transformation le triangle ABC est-il l'image de $A''B''C''$?

Opérations sur les vecteurs

3.12 En utilisant le quadrillage, construire :

1. Le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \vec{u}$
2. Le point B' tel que $\overrightarrow{BB'} = \vec{v} + \vec{w}$
3. Le point C' tel que $\overrightarrow{CC'} = \vec{u} + \vec{v}$
4. Le point D' tel que $\overrightarrow{DD'} = \vec{w} - \vec{v}$
5. Le point E' tel que $\overrightarrow{EE'} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
6. Le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
7. Le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}$
8. Le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA}$
9. Le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$
10. Le point J tel que $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$



3.13 Let ABC be a scalene triangle.

1. Place the point E such that $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
2. Place the point F such that $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.
3. Place the point G such that $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.
4. Let H be the point such that $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$.
   - **a.** Transform the definition of $\overrightarrow{HA}$ to find a known vector equal to $\overrightarrow{AH}$.
   - **b.** Place the point H.

5. Let I be the point such that $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$.

a. Transform the definition of $\overrightarrow{IA}$ to express $\overrightarrow{AI}$ as a sum of two known vectors.

b. Place the point I.

6. Let J be the point such that $\overrightarrow{JA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

a. Transform the definition of $\overrightarrow{JA}$ to express $\overrightarrow{AJ}$ as a sum of two known vectors.

b. Place the point J.

3.14 Let A and B two points such that $AB = 6\text{cm}$.

1. Place the points defined below :

a. E such that $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

b. F such that $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$;

c. G such that $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$;

d. H such that $\overrightarrow{BH} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$;

e. I such that $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$.

2. Give the magnitudes of the vectors $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AI}$.

3.15 Construire un carré $ABCD$ de côté 5cm au centre d'une feuille puis placer les points définis ci-dessous :

1. E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$;

2. F tel que $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$;

3. G tel que $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC}$;

4. H tel que $\overrightarrow{DH} = 2\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{EF}$;

5. I tel que $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$;

6. J tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$;

7. K tel que $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{BK}$.

3.16 Soit $[OA]$ un segment de longueur 6 cm. On fera une figure en plaçant $[OA]$ au centre de la page.

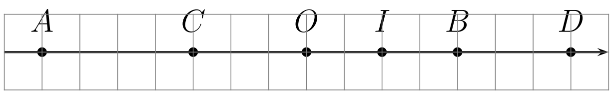
1. Reproduire la figure et placer les points définis par :

$$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$$

2. Déterminer les nombres réels, x, y, z tels que :

$$\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{ED} \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = z\overrightarrow{BD}$$

3.17 On considère la figure suivante.

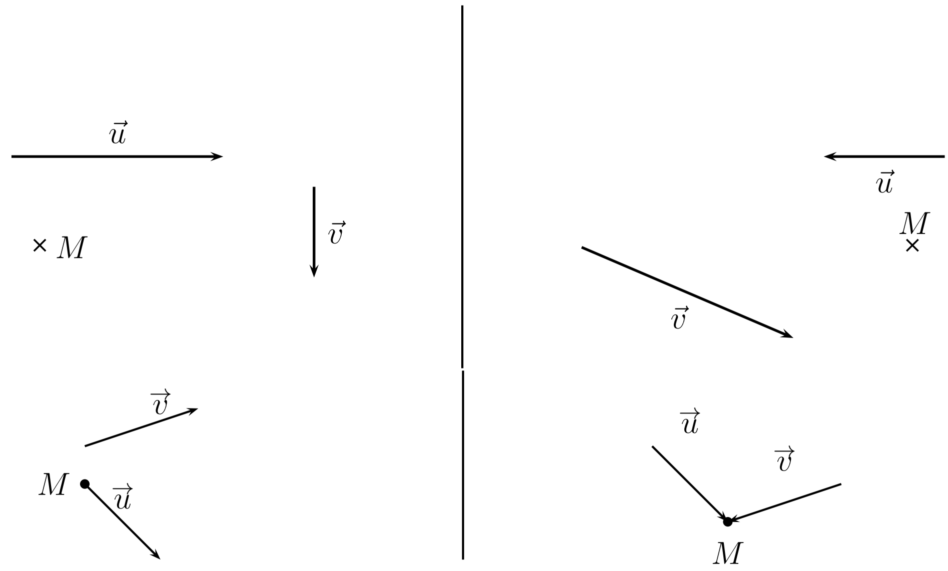


1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DB}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{OI}$.

2. Déterminer les nombres réels, x, y, z tels que :

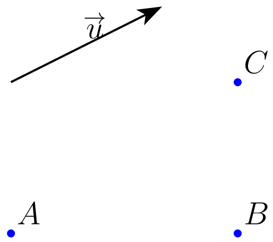
$$\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{BD} \quad ; \quad \overrightarrow{CD} = y\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{DA} = z\overrightarrow{OB}$$

3.18 Sans utiliser de quadrillage, reproduire la figure et construire dans chaque cas, un représentant du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ à partir du point M.



3.19 Sans utiliser de quadrillage, reproduire la figure ci-dessous et construire :

1. le représentant de $2\vec{u}$ d'origine A ;
2. le représentant de $\frac{1}{2}\vec{u}$ d'origine B ;
3. le représentant de $-\frac{1}{2}\vec{u}$ d'origine C.



3.20 On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires tels que $||\vec{u}|| = 2$ et $||\vec{v}|| = 3$.

1. Construire les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ au centre d'un espace de 100 cm^2.
2. Construire les vecteurs suivants en utilisant des couleurs différentes.

$$\vec{u} + \vec{v} \quad ; \quad 2\vec{u} \quad ; \quad -\frac{2}{3}\vec{v} \quad ; \quad -3\vec{u} + \vec{v} \quad ; \quad 2\vec{v} + 0,5\vec{u} \quad ; \quad 1,5\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}.$$

Relation de Chasles

3.21 Recopier et compléter chaque égalité en utilisant la relation de Chasles.

1. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{\ldots B}$
2. $\cdots = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{\ldots M}$
3. $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{\ldots B} + \ldots$
4. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \ldots$
5. $\vec{0} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{C\ldots}$
6. $\cdots = \overrightarrow{U\ldots} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{\ldots S}$
7. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{\ldots P} + \cdots + \overrightarrow{TB}$
8. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots B} + \ldots$

3.22 Consider the following vectors :

- $\vec{u_1} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
- $\vec{u_2} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
- $\vec{u_3} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$
- $\vec{u_4} = \overrightarrow{BA} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AB}$
- $\vec{u_5} = \overrightarrow{BC} - 2\left(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right)$

1. Write each of the previous vectors as a linear combination of vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$.

2. Write each of the previous vectors as a linear combination of vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{BC}$.

3. Write each of the previous vectors as a linear combination of vectors $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{AC}$.

3.23 Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit P, Q, R et S les points définis par :

$$\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}\,;\ \overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}\,;\ \overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{DS} = 2\overrightarrow{DA}.$$

1. Faire une figure.

2. Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Exprimer $\overrightarrow{SR}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.

4. En déduire la nature du quadrilatère $PQRS$.

3.24 Soit ABC un triangle.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

4. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

5. Soit D le point tel que $3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$.

- **a.** Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- **b.** Placer le point D.

3.25 Soit ABC un triangle scalène.

1. Soit M le point tel que $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

- **a.** Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
- **b.** Placer le point M.

2. Soit N le point tel que $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} = 2\overrightarrow{BC}$.

- **a.** Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
- **b.** Placer le point N.

3. Soit P le point tel que $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$.

- **a.** Exprimer $\overrightarrow{PA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- **b.** Placer le point P.

3.26 On se place dans un triangle quelconque ABC. On fera une figure différente pour chaque partie de cet exercice.

Partie A – Un cas particulier

Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

1. Placer les points M et N.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Que peut-on en déduire pour les droites (MN) et (BC) ?

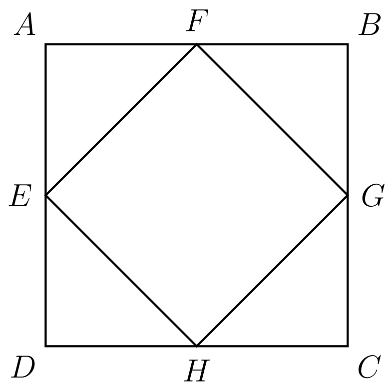
Partie B – Le cas général

Considérons maintenant un nombre réel positif k, M un point de la droite (AB) tel que $\frac{AM}{AB} = k$ et N le point de (AC) tel que $\frac{AN}{AC} = k$. On suppose que A, B, M et A, C, N sont dans le même ordre.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction $\overrightarrow{AB}$.
2. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire une relation entre $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$.
4. Que peut-on en déduire :
   a. pour les droites (MN) et (BC) ?
   b. pour le rapport $\frac{MN}{BC}$?
5. Quel célèbre théorème vient-on de démontrer ?

Colinéarité

3.27 On s'intéresse à la figure ci-dessous, composée d'un carré $ABCD$ de côté 2 unités et du carré formé par les milieux de ses côtés.



1. Déterminer les normes des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FH}$.
2. Trouver et nommer deux vecteurs opposés à chacun des vecteurs précédents.
3. Dans chacun des cas suivants, préciser si les deux vecteurs sont colinéaires ou non. S'ils le sont, écrire les deux égalités qui les unit. Par exemple, les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et vérifient $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

- $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BC}$;
- $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DA}$;
- $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{FE}$;
- $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{EH}$;
- $3\overrightarrow{FG}$ et $2\overrightarrow{EH}$;
- $-\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{AG}$.

4. Dresser la liste exhaustive de tous les vecteurs construits avec les points de la figure colinéaires à $\overrightarrow{HC}$. Même question pour $\overrightarrow{EF}$ puis pour $\overrightarrow{GD}$.

3.28 Soient ABC un triangle ; M et N les points tels que

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad ; \quad \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$$

1. Placer les points M et N.
2. **a.** Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Conclure sur l'alignement des points M, B et N.

3.29 Soient $ABCD$ un parallélogramme et I est le milieu de $[DC]$.

1. Construire les points M et N tels que $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.
2. **a.** Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   c. En déduire que (MN) et (BI) sont parallèles.
3. **a.** Exprimer $\overrightarrow{CM}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   b. Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   c. En déduire que les points C, M et N sont alignés.

3.30 Let $ABCD$ be a parallelogram.

1. Place the points H, K and E such that $\overrightarrow{AH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{8}\overrightarrow{BD}$.
2. **a.** Write $\overrightarrow{AC}$ as a linear combination of vectors $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AD}$.
   b. Write $\overrightarrow{KH}$ as a linear combination of vectors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
   c. Deduce that the lines KH are AC parallel one to another.
3. **a.** Write $\overrightarrow{KE}$ as a linear combination of vectors$\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AD}$.
   b. Deduce that the points E, K and H are collinear.

3.31 Let ABC be a triangle and k a number. The points M and N are defined by the equalities : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + (k+1)\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (k+1)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. First, let consider $k = -2$. Draw a figure and prove that the line MN is parallel to the line BC.
2. Now, let k be any number. Using the letter k, find the relation between $\overrightarrow{MN}$ and $\overrightarrow{BC}$. What can you deduce :
   a. about the lines MN and BC ;
   b. about the ratio $\frac{MN}{BC}$?
3. For what value of k is $BCNM$ a parallelogram ? Draw a figure for that particular value of k.

3.32 Let $ABCD$ be a rectangle with $AB = 7\text{cm}$ and $BC = 3\text{cm}$.

1. Place the points E, F, G et H such that :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \ ; \ \overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \ ; \ \overrightarrow{DG} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \ ; \ \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{HB}.$$

2. What can you say about $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{DC}$ first, and then about $\overrightarrow{AD}$ and $\overrightarrow{BC}$?

3. Find the relations between $\overrightarrow{EB}$ and $\overrightarrow{AB}$, then between $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{BF}$.

4. Use the previous equalities to prove that $\overrightarrow{EC}$ are $\overrightarrow{AF}$ collinear.

5. Find the relations between $\overrightarrow{GD}$ and $\overrightarrow{DA}$, then between $\overrightarrow{CF}$ and $\overrightarrow{BC}$.

6. Prove that $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DC}$.

7. Deduce the nature of the quadrilateral $ABFG$.

8. Prove that H, A, F are collinear.

Homework #4 – Barycentre of two points

Let $[AB]$ be a segment with length 6 cm. All the points in this exercise will be placed on the same figure.

1. Let G be the point defined by the equality $2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

a. Prove that $5\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ and deduce a simple relation between $\overrightarrow{AG}$ and $\overrightarrow{AB}$.

b. Is there more than one position for the point G? Show it on the figure.

2. Let H the point such that B is the midpoint of $[AH]$.

a. Build the point H on the figure.

b. What can you say about the vectors $\overrightarrow{AH}$ and $\overrightarrow{HB}$?

c. Find two numbers α and β such that $\alpha\overrightarrow{HA} + \beta\overrightarrow{HB} = \vec{0}$.

The point G defined in question 1 by the equality $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ is called the *barycentre of the points A and B with respective coefficients* 2 *and* 3. More generally, any point K defined by an equality $\alpha\overrightarrow{KA} + \beta\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ where α and β are two real numbers such that $\alpha + \beta \neq 0$ is called the *barycentre of the points A and B with respective coefficients α and β*.

3. What can you say about the point H?

4. Let P be the barycentre of A and B with respective coefficients 2 and 1.

a. What equality defines the point P?

b. Deduce from this equality a relation between the vectors $\overrightarrow{AP}$ and $\overrightarrow{AB}$.

c. Place the point P.

5. Let Q be the barycentre of A and B with respective coefficients -2 and 1.

a. What equality defines the point Q?

b. Deduce from this equality a relation between the vectors $\overrightarrow{AQ}$ and $\overrightarrow{AB}$.

c. Place the point Q.

6. Let R be the barycentre of A and B with respective coefficients -2 and 2.
   a. What equality defines the point R?
   b. Deduce from this equality a relation between the vectors $\overrightarrow{AR}$ and $\overrightarrow{AB}$.
   c. Could you place the point R? What is the problem?
7. Let S be the point such that $\overrightarrow{AS} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
   a. Place the point S.
   b. Prove that $4\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SB}$.
   c. Deduce two numbers m and n such that $m\overrightarrow{SA} + n\overrightarrow{SB} = \vec{0}$.
   d. Give a definition of S using barycentre.

Devoir de l'année précédente

Exercice 1 : (5 points)

This exercise is an MCQ. In each situation, one or more equalities is true. You must tick the true ones. A good answer is worth 1 point, an incomplete but correct one 0.5 points, and a partially or completely wrong answer 0 points.

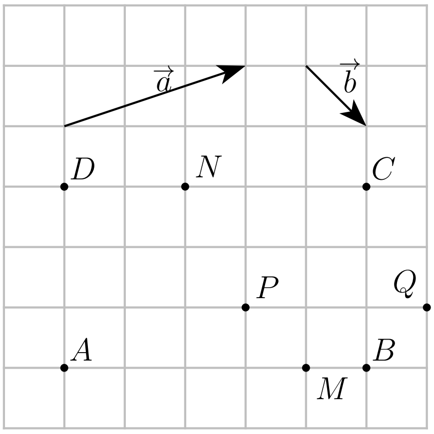
1. A quadrilateral $ABCD$ is a parallelogram if and only if
   - ☐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
2. If I is the midpoint of a segment $[AB]$, then
   - ☐ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AB}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BI}$.
3. Let ABC be a triangle with I and J the midpoints of the sides $[AB]$ and $[AC]$. Then
   - ☐ $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{IJ}$ are collinear;
   - ☐ $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{IJ}$ are equal;
   - ☐ $\overrightarrow{BC}$ and $\overrightarrow{JI}$ have the same direction;
   - ☐ $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{BC}$.
4. If $ABCD$ is a parallelogram, then
   - ☐ $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;
   - ☐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$.
5. Let A, B, C be three points such that $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Then
   - ☐ the points A, B, C are collinear;
   - ☐ the points A, B, C have no special property;

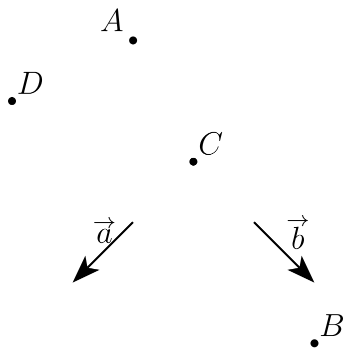
☐ the point B is the midpoint of $[AC]$;
☐ the triangle ABC is isosceles.

Exercice 2 : (7 points)

Dans cet exercice, plusieurs tracés sont à réaliser. Ils devront l'être directement sur le sujet, en laissant apparents les traits de construction. On donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Construire, pour chacune des figures, les points M, N, P et Q définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{b} \quad ; \quad \overrightarrow{BN} = -3\vec{b} \quad ; \quad \overrightarrow{CP} = \vec{b} - \vec{a} \quad ; \quad \overrightarrow{DQ} = \vec{a} + 3\vec{b}$$





Exercice 3 : (8 points)

Let $ABCD$ be a quadrilateral, with I, J, K and L the midpoints of the sides AB, BC, CD and DA. The aim of this exercise is to study the nature of the quadrilateral $IJKL$.

1. Draw a quick sketch of the situation and conjecture the nature of $IJKL$.
2. What vector equality must you prove so that your conjecture is true?
3. What relation between the vectors $\overrightarrow{IB}$ and $\overrightarrow{AB}$ comes from the definition of the point I? Same question for the vectors $\overrightarrow{BJ}$ and $\overrightarrow{BC}$.
4. Decompose the vectors $\overrightarrow{IJ}$ and $\overrightarrow{AC}$ through point B.
5. Deduce from the two previous questions a simple relation between the vectors $\overrightarrow{IJ}$ and $\overrightarrow{AC}$.
6. Following similar steps, prove that $\overrightarrow{LK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
7. What can you conclude about the vectors $\overrightarrow{IJ}$ and $\overrightarrow{LK}$ and for the parallelogram $IJKL$?

Table of Contents

Related Episodes