Chapitre V
Vecteurs

Table des matières

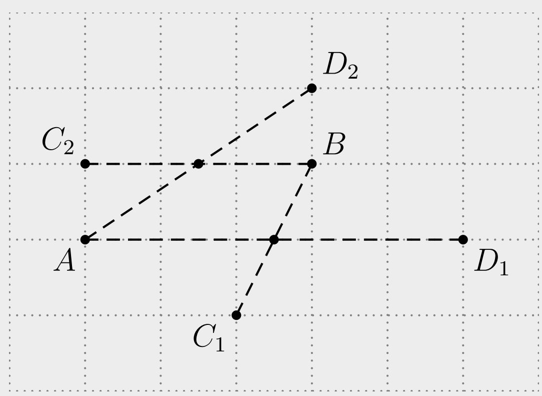
1. Translations

Intuitivement, une *translation* est une transformation géométrique qui correspond à l'idée de *glissement* d'un objet, sans rotation, retournement ni déformation de cet objet.

Définition 1 : Translation

Considérons deux points du plan A et B. La translation de A vers B est la transformation qui, à tout point C du plan, associe le point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu. (c'est à dire le point D tel que $ABCD$ est un parallélogramme.)

Illustration :



Translation

A translation moves every point of a figure by the same amount in a given direction.

2. Vecteurs

2.1. Définitions

Concrètement dire que D est l'image de C par la translation qui transforme A en B, cela signifie que le trajet qui va de A vers B est le même que celui qui va de C vers D. Les notions de segment et de droite ne suffisant pas à décrire les trajets, il convient d'introduire une nouvelle notion : les vecteurs.

Définition 2 : Vecteur

Un **vecteur** $\vec{u}$ est un objet mathématique caractérisé par : une direction, un sens, et une longueur (ou **norme** notée $||\vec{u}||$). Graphiquement, un vecteur est représenté par une flèche.

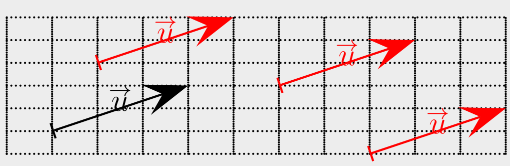
Vector

A *vector* is a geometric object that has both a magnitude (or length) and a direction. A vector is frequently represented by a line segment with a definite direction, or graphically as an arrow.

Définition 3 : Représentants d'un vecteur

Un vecteur $\vec{u}$ n'a pas de position, il n'est pas fixe. On peut représenter le même vecteur à plusieurs "endroits" . On dit alors que ce sont des *représentants* du même vecteur $\vec{u}$.

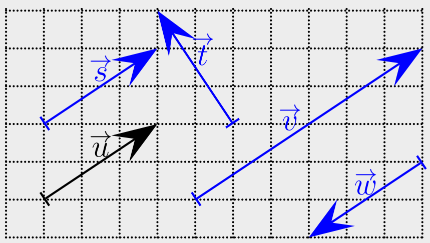
Illustration :



Définition 4 : vecteurs égaux, opposés, nuls

- Des vecteurs sont **égaux** si et seulement si ils ont même direction, même sens et même norme.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est **l'opposé** du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Il a même direction, même norme mais sens opposé à $\overrightarrow{AB}$;
- Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$ est appelé le **vecteur** nul et est noté $\vec{0}$. Il n'a ni direction, ni sens.

Illustration :



- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{t}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas la même direction.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas la même norme.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas le même sens. Ils sont opposés.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{s}$ sont égaux.

Equal vectors

Two arrows $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{A'B'}$ represent the same vector if they have the same magnitude and direction. Equivalently, they are equal if the quadrilateral $ABB'A'$ is a parallelogram. Two vectors are opposite if they have the same magnitude but opposite directions. The null vector has no direction and a magnitude equal to 0.

2.2. Vecteurs et géométrie

Théorème 1 : Parallélogramme et vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

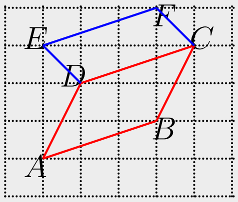
Preuve. Supposons que $ABCD$ soit un parallélogramme. Les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont donc égaux et parallèles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont même direction, même sens, et même longueur. Ils sont donc égaux.
Réciproquement, si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ alors les segments $[AB]$ et $[DC]$ sont égaux et parallèles et donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. □

Exercice résolu 1 :

Soient $ABCD$ un parallélogramme, E et F deux points tels que $CDEF$ soit aussi un parallélogramme, non confondu avec $ABCD$.

1. Faire une figure.
2. Traduire les hypothèses par deux égalités vectorielles.
3. Prouver que $ABFE$ est un parallélogramme.

Solution :

1. 

2. $ABCD$ un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   $CDEF$ un parallélogramme donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$.
3. On déduit de 2. que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$, ce qui implique que $ABEF$ est un parallélogramme.

Théorème 2 : Milieu d'un segment

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ (égalité qui peut aussi s'écrire $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou encore à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$, voir sections suivantes).

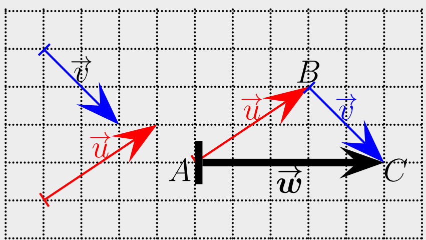
Preuve. Supposons que I soit le mileu de $[AB]$. On a alors $IA = IB$ et (IA) parallèles à (IB). Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$ ont même direction, même sens, et même longueur. Ils sont donc égaux. Réciproquement, si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ alors d'une part les longueurs AI et IB sont égales et d'autres part (AI) est parallèle à (IB). Les droites ayant un point commun, les points sont alignés et donc I est le milieu de $[AB]$. □

2.3. Somme de deux vecteurs

Définition 5 : Somme

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, on définit le vecteur $\vec{w}$ somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la façon suivante :
Soit A un point du plan, on trace le représentant de $\vec{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B.
Puis on trace le représentant de $\vec{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

Illustration : Construction de $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



Théorème 3 : Relation de Chasles [1]

Pour tout point A, B et C du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Remarque : Cette propriété est connue sous le nom de relation de Relation de Chasles. Elle n'a pas de nom spécifique dans les autres pays.

The parallelogram rule

If two vectors $\vec{u}$ and $\vec{v}$ form the sides of a parallelogram, then $\vec{u} + \vec{v}$ is one of the diagonals.

Théorème 4 : Propriétés de l'addition de vecteurs

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan, on a :
- $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (commutativité) ;
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (transitivité) ;
- $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.

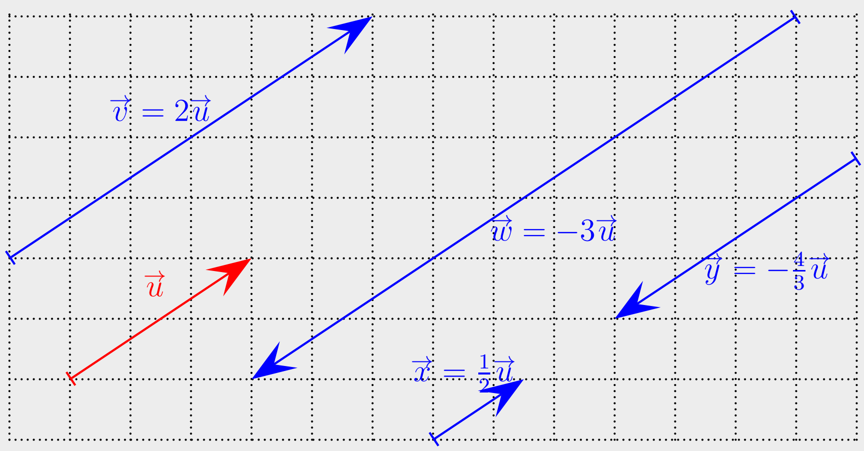
2.4. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition 6 : Multiplication

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$ par :
- Si $\vec{u} = 0$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.
- Si $k > 0$, $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens et la norme de $\vec{v}$ vaut k fois celle de $\vec{u}$;
- Si $k < 0$, $\vec{v}$ et $\vec{u}$ ont même direction, sont de sens opposés et la norme de $\vec{v}$ est égale à $|k|$ fois celle de $\vec{u}$.

Illustration :

Sur la figure ci-dessous :



- $\vec{v} = 2\vec{u}$.
- $\vec{w} = -3\vec{u}$.
- $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u}$.
- $\vec{y} = -\frac{4}{3}\vec{u}$.

Théorème 5 : Propriété de la multiplication d'un vecteur par un nombre

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et les réels k et l , on a :
- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$ (distributivité par rapport aux vecteurs) ;
- $(k+l)\vec{u} = k\vec{u}+l\vec{u}$ (distributivité par rapport aux réels) ;
- $k(l\vec{u}) = (kl\vec{u})$ (associativité) ;

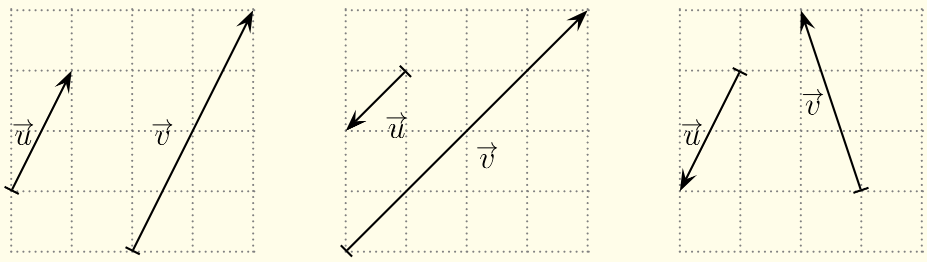
Théorème 6 : Produit nul

Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur.
$k\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

3. Colinéarité

3.1. Intuitivement

Exemple :



$\vec{v} = 2\vec{v}$ $\quad$ $\vec{v} = -4\vec{v}$ $\quad$ Impossible

Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction, il n'existe pas de réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

3.2. Définition et caractérisation

Définition 7 : Colinéarité

Deux vecteurs sont dits **colinéaires** si et seulement si ils ont la même direction.
Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Collinear vectors

Two vectors are collinear when one is a non-zero scalar multiple of the other.

Théorème 7 : Caractérisation de la colinarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Théorème 8 : Colinéarité et parallélisme

Les droites (AB) et(CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Preuve. En effet, le fait que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ soient colinéaires équivaut au fait qu'ils aient la même direction, c'est à dire que les droites (AB) et (CD) soient parallèles. □

Théorème 9 : Colinéarité et alignement

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Preuve. D'après la proposition précédente, les $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si les droites (AB) et (AC) sont parallèles, c'est à dire si et seulement si les points A, B et C sont alignés. □

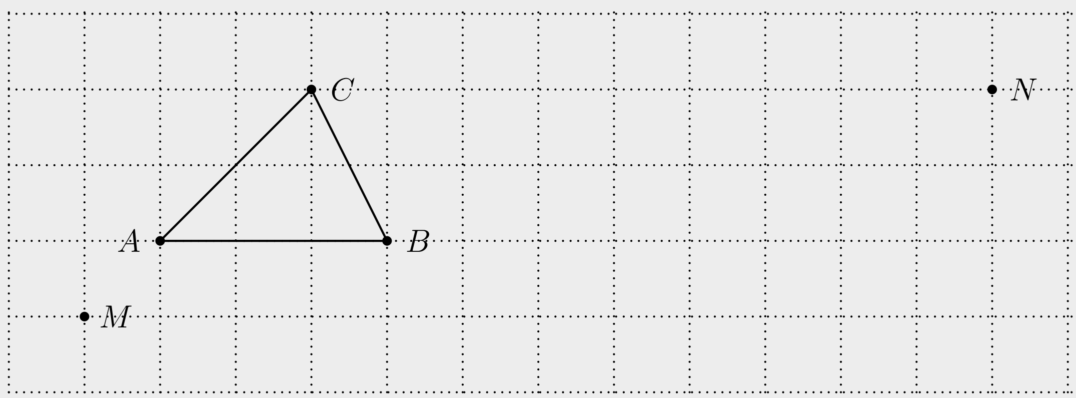
Exercice résolu 2 :

ABC est un triangle. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

1. Placer les points M et N.
2. Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Conclure sur l'alignement des points M,B et N.

Solution :

1.



2. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$
4. De 2. et 3., on conclut que $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires donc les points M,B et N sont alignés.

4. Compléments

4.1. Chasles

4.1.i) Bibliographie

Michel Chasles, né en 1793 à Épernon (Eure-et-Loir) et mort le 18 décembre 1880 à Paris, est un mathématicien français.
Il est né en 1793 dans la ville d'Épernon, située non loin de Chartres. Après des études secondaires brillantes, Chasles entre à l'École polytechnique en 1812. Il y devient professeur en 1841. En 1846, une chaire de géométrie supérieure est créée pour lui à la Sorbonne. Il est

élu en 1851 membre de l'Académie des sciences, dont il était correspondant depuis 1839. En 1837, il publie un ouvrage intitulé Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.
Son nom est attaché à la relation de Chasles mais cette propriété était déjà utilisée longtemps avant lui. D'autre part, on lui doit aussi le théorème de Chasles qui stipule que toute fonction harmonique, c'est-à-dire toute fonction qui est une solution de l'équation de Laplace, peut se représenter par un potentiel de simple couche sur l'une quelconque de ses surfaces équipotentielles.
Il a inventé le terme homothétie, qu'il prononçait /omoteti/ au lieu de /omotesi/ comme aujourd'hui. Il a aussi travaillé sur les homographies et la géométrie projective. Il a introduit le rapport anharmonique appelé aussi birapport de 4 points alignés. Ses travaux de géométrie lui valurent la Médaille Copley en 1865.
Il meurt le 18 décembre 1880 à Paris.

4.1.ii) Anecdocte

Dans Apologie pour l'Histoire, Marc Bloch rappelle une mésaventure humiliante survenue à Michel Chasles, éminent homme de sciences mais qui avait voulu se mêler d'histoire, un domaine où il n'entendait rien.
En juillet 1857 l'illustre mathématicien présenta à l'Académie des Sciences toute une série de lettres inédites de Pascal, que le fameux faussaire Vrain-Lucas venait de fabriquer. Elles établissaient qu'avant Newton l'auteur des Pensées avait découvert le principe de l'attraction universelle. Malheureusement un savant anglais fit observer qu'on y trouvait des mesures astronomiques bien postérieures à la mort de Pascal. Approvisionné une nouvelle fois par Vrain-Lucas, Chasles montra alors des lettres où Galilée communiquait à Pascal les résultats de ses observations.
Sans se déclarer battu notre Anglais remarqua cette fois que dans une lettre de 1641 Galilée se plaignait de sa mauvaise vue alors qu'il était complètement aveugle depuis près de quatre ans. Surgit alors une nouvelle lettre, postérieure à la précédente et datée de décembre 1641 dans laquelle un autre savant italien apprenait à Pascal que Galilée, dont la vue n'avait cessé de baisser, avait fini par la perdre entièrement.
Ses collègues de l'Institut prirent la chose avec bonne humeur, mais à l'étranger (à Londres en particulier) on fit des gorges chaudes du manque d'esprit critique des scientifiques français. Quant au pauvre Chasles, il se montra désespéré de s'être fait ainsi mystifier. D'autant que, comme on l'apprit plus tard, il avait acheté à Vrain-Lucas d'autres lettres, de Vercingétorix à Jules César, de César à Cléopâtre, toutes rédigées dans un simili vieux français.
d'après un article de Wikipédia, l'encyclopédie libre.