Seconde européenne
Exercices de mathématiques

Chapitre 8

Fonctions de référence
Further functions

Foxtrot, by Bill Amond

À la fin de ce chapitre, vous devez :

- connaître les représentations graphiques, tableaux de signe et variations des fonctions affines, carrés, inverses ;
- connaître les variations des fonctions polynômes de degré 2 (monotonie, extremum) et la propriété de symétrie de leurs courbes ;
- identifier l'ensemble de définition d'une fonction homographique ;
- résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de signe.

Aymar de Saint-Seine et Mickaël Védrine
Année scolaire 2010/2011

Fonctions affines et linéaires

8.1 Dans la liste suivante, reconnaître les fonctions affines et les fonctions linéaires. Vérifier la réponse en traçant sur la calculatrice la représentation graphique de chaque fonction.

1. $f_1(x) = 3x + 1$;
2. $f_2(x) = -x$;
3. $f_3(x) = 25$;
4. $f_4(x) = 2x^2 - 5$;
5. $f_5(x) = \dfrac{9x}{7}$;
6. $f_6(x) = -2x + \sqrt{2}$;
7. $f_7(x) = \dfrac{4x-6}{2}$;
8. $f_8(x) = \dfrac{2}{4x-6}$;
9. $f_9(x) = (2x-1)^2$;
10. $f_{10}(x) = 2x - 1^2$;
11. $f_{11}(x) = \sqrt{3x+2}$;
12. $f_{12}(x) = \sqrt{3}x + \sqrt{2}$.

8.2 **Variations et signe des fonctions affines**

Partie A – Un cas particulier

On considère dans cette partie la fonction affine défnie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x - 5$.

1. Tracer la courbe de f à la calculatrice. Quelle semble être le sens de variation de f ?
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
   a. Quel est le signe de la différence $a - b$?
   b. Puisque $f(x) = 2x - 5$, le nombre $f(a)$ est égal à $2a - 5$.
   En remplacant $f(a)$ et $f(b)$ par leurs expressions, calculer et factoriser l'expression $f(a) - f(b)$.
   c. En déduire le signe de $f(a) - f(b)$, puis en déduire l'ordre des nombres $f(a)$ et $f(b)$.
   d. Justifier alors le sens de variation de f.
3. Déterminer les valeurs de x qui annulent $f(x)$.
4. En utilisant la question précédente et les variations de f, déterminer le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x. On donnera la réponse sous forme de phrase puis sous forme de tableau de signe.

Partie B – Le cas général

1. En traçant leurs représentations graphiques à la calculatrice, observer les variations des fonctions affines définies ci-dessous.

$$f_1(x) = -3x + 2 \qquad f_2(x) = x + 4 \qquad f_3(x) = -\tfrac{1}{2}x - \tfrac{5}{2}$$
$$f_4(x) = -\tfrac{12}{7}x \qquad f_5(x) = 5x - 5 \qquad f_6(x) = \tfrac{1}{3}x + 2$$

Dans la suite, on considére une fonction affine quelconque définie par $f(x) = mx + p$.

2. En s'appuyant sur les résultats de la question précédente, proposer une méthode simple pour déterminer les variations de f.

3. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
   a. Quel est le signe de la différence $a - b$?
   b. Étudier le signe de la différence $f(a) - f(b)$ en fonction des valeurs de m.
   c. En utilisant le résultat de la question précédente, ordonner les images $f(a)$ et $f(b)$ en fonction des valeurs de m.
   d. Conclure en rédigeant un théorème concernant le sens de variation d'une fonction affine quelconque.
4. Expliquer pourquoi il ne peut exister qu'une unique valeur de x telle que $f(x) = 0$.
5. Pour chacune des fonctions affines de la question 1 de cette partie, calculer la valeur de x annulant $f(x)$.
6. Dresser un tableau de signe pour chacune des fonctions de la question 1.
7. Proposer une méthode générale pour déterminer le signe d'une fonction affine.

8.3 Déterminer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = 7 - x \quad ; \quad g(x) = (\sqrt{2} - 1)x \quad ; \quad h(x) = \frac{-2x + 5}{3}$$
$$i(x) = \frac{-1}{3}(2 - x) \quad ; \quad j(x) = -\frac{x}{1 - \sqrt{2}} \quad ; \quad k(x) = 5$$

8.4 On considère la fonction affine définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = -5x + 2$.

1. Quel est le sens de variation de cette fonction ?
2. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. En étudiant le signe de $f(a) - f(b)$, retrouver le sens de variation de f.

8.5 On donne ci-dessous 5 fonctions affines :

$$f(x) = 4x - 2 \quad ; \quad g(x) = 5 \quad ; \quad h(x) = 2x \quad ; \quad i(x) = -2x + 2 \quad ; \quad j(x) = 4 - 2x$$

1. Dresser le tableau de variation de chacune de ces fonctions.
2. Dresser le tableau de signe de chacune de ces fonctions.
3. Dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, tracer les représentations graphiques de ces fonctions.

8.6 Two main temperature units are used in everyday life, the Celsius and Farenheit degrees. The formuls to switch from one to the other is as follows. If x is the temperature in Celsius, then the temperature in Farenheit is

$$f(x) = \frac{9}{5}x + \frac{288}{5}.$$

1. Turn into farenheit degrees the following temperatures in Celsius : 0, 5, 20, 35, 100. Give the results in a table of values.
2. What kind of function is f ?
3. Prove that the higher the temperature in Celsius, the higher the temperature in Farenheit.

4. Find the Celsius temperature that gives a Farenheit temperature equal to 0.
5. Study the sign of the function f.
6. Is it often that we get, in France, a negative Farenheit temperature ?

8.7 Une personne a souscrit à un abonnement de téléphonie mobile. Le montant qu'elle doit payer chaque mois est calculé de la façon suivante. Une minute de communication est facturée 40 centimes d'euros. Si le total de sa consommation mensuelle est inférieur à 18 euros, la personne paye 18 euros. Sinon, elle paye le montant de sa consommation effective.
On considère la fonction définie sur l'ensemble $[0, 100[$ par $f(x) = 0,4x - 18$. Toutes les réponses de ce exercice devront être soigneusement justifiées.

1. Utiliser la fonction f pour traduire le mode de calcul du montant payé chaque mois par l'abboné.
2. Quelles sont les variations de la fonction f ?
3. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ? Les déterminer.
4. Étudier le signe de la fonction f.
5. Préciser le montant payé pour les temps de communication mensuels suivants : 10 minutes, 20 minutes, 40 minutes, 1 heure, 1 heure et 30 minutes, 2 heures.

8.8 In this exercise, we look at the problem of currency exchange.

Partie A – The official exchange rate

As of April 6, 2010, one euro was equivalent to 0.88 UK pounds.

1. Convert the following amounts into UK pounds : 5 euros, 20 euros and 75 euros.
2. Find out the formula of the function p that converts euros into UK pounds.
3. What are the variations of the function p ? Use this result to fill out the following sentence : The . . . euros you convert, the . . . pounds you get.

Partie B – Two bank services

A bank is offering a currency exchange service. They charge a 5 euros commission for any operation, and offer a rate of 0.85 pounds for 1 euro.

1. In that bank, how many pounds would you get for 5 euros, 20 euros and 75 euros ?
2. Find the formula of the function b_1 giving the amount in UK pounds you would get for x euros.
3. What are the variations of the function b_1 ?
4. Find out the value of x such that $b_1(x) = 0$ and study the sign of $b_1(x)$ over the interval $[0, 100]$.

Another bank is offering a rate of 0.75 euros, with no commission.

5. In that bank, how many pounds would you get for 5 euros, 20 euros and 75 euros ?
6. Find the formula of the function b_2 giving the amount in UK pounds you would get for x euros.
7. What are the variations of the function b_2 ?
8. Study the sign of $b_2(x)$ over the interval $[0, 100]$.

Partie C – Comparing the two banks

A UK visitor has to decide what bank to choose for a currency exchange operation. To do so, let's define a function f by the formula

$$f(x) = b_2(x) - b_1(x).$$

1. Find the formula for f.
2. Explain how function f can be used to help the visitor decide what bank to go to.
3. What are the variations of the function f ? What does it mean for the services offered by the two banks ?
4. Find the solution of the equation $f(x) = 0$. What does it mean for the services offered by the two banks ?
5. Help the visitor decide what bank he should go to.

8.9 Deux amis décident de partir en vacances avec une vieille voiture. A leur départ, le compteur indique un kilométrage total de 285km. Ils se rendent compte alors que ce kilométrage diminue au lieu d'augmenter ! Ils se posent alors la question suivantes : en considérant qu'ils roulent à une vitesse moyenne de 60 km/h, au bout de combien de temps de conduite la compteur indiquera-t-il 0 ?

1. Quelle fonction affine f peut-être utilisée pour résoudre ce problème ?
2. Déterminer les variations de f. Ces variations sont-elles cohérentes avec l'énoncé ?
3. Résoudre le problème initial en utilisant la fonction.

8.10 Résoudre chacune des inéquations suivantes :

1. $(2x + 1)(-5 - x)(x - 7) \leqslant 0$.
2. $\dfrac{-5}{x(x-1)} > 0$.

8.11 Etudier le signe de chacune des expressions suivantes après avoir factorisé ou mis au même dénominateur :

1. $(2x - 1)(2 + x) + (2x - 1)^2$.
2. $\dfrac{x}{x-4} - 2$
3. $x^2 - (2x + 1)^2$

8.12 On rappelle qu'une racine carrée n'existe que si l'expression sous le radical est positif.

Pour quelle valeur de x l'expression $\sqrt{\dfrac{2x+3}{3x-2}}$ existe-elle ?

Fonctions polynômes de degré 2

8.13 **La fonction carré**
Dans cet exercice, on s'intéresse à la plus simple des fonctions du second degré, la fonction carré définie par

$$f(x) = x^2.$$

1. Déterminer, sans la calculatrice, les images des entiers de l'intervalle $[-5; 5]$ par la fonction f et exposer les résultats dans un tableau de valeurs.
2. Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-3; 3]$. Quelles semblent être les variations de cette fonction ?
3. Dans cette question nous allons démontrer que les variations de la fonction carré sont bien celles observées précédemment. Pour cela, considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$.
   a. Quel est le signe de la différence $a - b$?
   b. Quelles sont les images de a et b par la fonction f ?
   c. Factoriser la différence $f(a) - f(b)$.
   d. Supposons que a et b soient tous les deux positifs. Quel est alors le signe de $a + b$ et celui de $f(a) - f(b)$? En déduire les variations de f sur $\mathbf{R}^+$.
   e. Supposons que a et b soient tous les deux négatifs. Quel est alors le signe de $a + b$ et celui de $f(a) - f(b)$? En déduire les variations de f sur $\mathbf{R}^-$.
   f. Conclure en dressant le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}$.
4. Soit a un réel non nul. Comparer les images $f(a)$ et $f(-a)$, puis représenter la situation sur un graphique. Quelle propriété cela implique-t-il pour la courbe représentative de la fonction f.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction à l'échelle 2cm pour une unité en abscisse et 1cm pour une unité en ordonnée.
6. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
   $x^2 = 2\,;\quad x^2 = 7\,;\quad x^2 = -1\,;\quad x^2 < 6\,;\quad x^2 \geqslant 1\,;\quad 3.6 < x^2\,;\quad 0.5 < x^2 \leqslant 5.$

8.14 On considère la fonction carré définie par $f : x \mapsto x^2$.

1. a. Déterminer un intervalle d'amplitude 10 sur lequel la fonction est croissante.
   b. Déterminer un intervalle d'amplitude 6 sur lequel la fonction est décroissante.
   c. Déterminer un intervalle d'amplitude 5 sur lequel le sens de variation de la fonction change.
   d. Déterminer un intervalle d'amplitude 7 sur lequel la fonction a pour minimum 0 et pour maximum 16.
2. a. Donner les extremums de f sur l'intervalle $I = [0,5; 3]$.
   b. Même question pour l'intervalle $[-3; -1]$.
   c. Même question pour l'intervalle $[-3; 2]$.

8.15 Associer à chaque affirmation (1 à 4) sa justification (5 à 8) :

1. Un carré est toujours positif.
2. $(-5,2)^2 > (-5,1)^2$.
3. $(-9,54)^2 = 9,54^2$.
4. $801^2 < 802^2$.
5. $f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbf{R}^-$.
6. $f : x \mapsto x^2$ admet pour minimum 0.
7. $f : x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbf{R}^+$.
8. $f : x \mapsto x^2$ est paire.

8.16 En justifiant à l'aide des variations de la fonction carré, donner un encadrement de x^2 danc chacun des cas suivants :

1. $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.
2. $-3 \leqslant x \leqslant -2$.
3. $x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$
4. $-2 \leqslant x \leqslant 1$.

8.17 On s'intéresse dans cet exercice aux 12 fonctions définies ci-dessous.

- $f_1(x) = 3x + 1$;
- $f_2(x) = x^2 + 2x + 2$;
- $f_3(x) = 25$;
- $f_4(x) = -2x^2 - 5$;
- $f_5(x) = 3x^2 + 2x + 5$;
- $f_6(x) = -2\sqrt{x}$;
- $f_7(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$;
- $f_8(x) = \dfrac{2}{4x - 6}$;
- $f_9(x) = (2x - 1)^2$;
- $f_{10}(x) = 2x - 1^2$;
- $f_{11}(x) = 2x^2 - 2,5x - 5$;
- $f_{12}(x) = -\frac{3}{2}x^2 - x - 3$.

1. Repérer les fonctions polynômes du second degré.
2. Pour chaque fonction polynôme du second degré dans la liste ci-dessus, répondre aux questions ci-dessous.
   a. Tracer la représentation graphique à la calculatrice dans une fenêtre standard, et faire un rapide schéma.
   b. Déterminer graphiquement les coordonnées du point extrêmal de la courbe.
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction sur l'intervalle visible sur l'écran de la calculatrice.
   d. Déterminer à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées des éventuelles solutions de l'équations $f_n(x) = 0$.
   e. Dresser le tableau de signes de la fonction sur l'intervalle visible sur l'écran de la calculatrice.
3. Quelles sont les propriétés communes à toutes les courbes tracées dans la question précédente ?
4. Proposer deux classements des fonctions polynômes du second degré précédentes, l'un concernant les variations, l'autre les solutions de l'équation $f_n(x) = 0$.

8.18 Dans cet exercice, on s'intéresse à la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1. Décrire les variations de cette fonction, en justifiant rapidement mais sans préciser aucune valeur.

2. La formule permet-elle de déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. Vérifier que $f(x) = (x+1)(x-3)$ et que $f(x) = (x-1)^2 - 4$.

Nous avons maintenant trois formules différentes pour la fonction f. Dans les questions suivantes, il faudra choisir quelle formule permet de répondre le plus facilement.

4. Calculer l'image de 0 par la fonction f.

5. Calculer l'image de -1 par la fonction f.

6. Calculer l'image de 1 par la fonction f.

7. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

8. Déterminer le minimum ou le maximum de la fonction f et préciser la valeur de x pour laquelle il est atteint.

9. Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbf{R}$.

10. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbf{R}$.

8.19 On s'intéresse dans cet exercice aux 12 fonctions polynômes du second degré définies ci-dessous.

- $g_1(x) = -x^2 - 1$;
- $g_2(x) = -2(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{2}$;
- $g_3(x) = (x-1)(x-5)$;
- $g_4(x) = (x-2)(x+2)$;
- $g_5(x) = -x^2 + 2x - 3$;
- $g_6(x) = x^2 - 4$;
- $g_7(x) = -(x^2 + 1)$;
- $g_8(x) = -(x-1)^2 - 2$;
- $g_9(x) = (x-3)^2 - 4$;
- $g_{10}(x) = -2x^2 + 6x$;
- $g_{11}(x) = -x(2x - 6)$;
- $g_{12}(x) = x^2 - 6x + 5$;

1. Repérer les fonctions égales dans la liste ci-dessus.

2. Pour chaque fonction, répondre à chacune des questions suivantes en utilisant la formule la mieux adaptée.

a. Déterminer les antécédents de 0.

b. Dresser le tableau de signes de la fonction.

c. Déterminer l'extremum de la fonction en précisant sa nature et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

d. Dresser le tableau de variations de la fonction.

8.20 On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

1. Utiliser la calculatrice pour calculer les images par la fonction f de tous les entiers de -5 à 5 et exposer les résultats dans un tableau.

2. Qu'observe-t-on dans le tableau précédent ? Quelle propriété graphique de la courbe de f cela indique-t-il ?

3. Conjecturer la valeur de x pour laquelle la fonction f atteint son extremum puis proposer un tableau de variations pour f.

4. Déterminer une constante C telle que $f(x) = (x + \frac{3}{2})^2 + C$.

5. Utiliser la formule précédente pour trouver la valeur de x pour laquelle la fonction f atteint son extremum et calculer cet extremum. La conjecture faite précédemment était-elle correcte ?

6. Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f et la droite d'équation $x = C$. Que constate-t-on ?

7. Soit a un nombre réel quelconque.

a. Simplifier au maximum les images $f(-\frac{3}{2} - a)$ et $f(-\frac{3}{2} + a)$.

b. Que constate-t-on dans les deux calculs précédents ?

c. Représenter la propriété ainsi observée par un rappide schéma. Quelle propriété graphique de la courbe de la fonction f est ainsi démontrée ?

8. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.

a. $x^2 + 3x + 1 = 0$;
b. $x^2 + 3x + 1 = 1$;
c. $x^2 + 3x + 1 = -1$;
d. $x^2 + 3x + 1 > 2$;
e. $x^2 + 3x + 1 \leqslant 0$;
f. $0 < x^2 + 3x + 1 \leqslant 1$.

8.21 Consider the function g defined over $\mathbf{R}$ by $g(x) = x^2 - x$.

1. Is g a linear function ? Is it a polynomial function ? If so, what is its degree ?

2. What is the general shape of the graph of g ? Answer with a sentence and a quick sketch.

3. Solve the equation $g(x) = 0$ and deduce the sign table of the function.

4. What seems to be the preimage of the extremum of function g ?

5. Find a constant real number m such that $g(x) = (x+m)^2 - \frac{1}{4}$. What can you deduce from this new formula for $g(x)$?

6. Draw the variations table of g.

7. In the same coordinate system, draw the symmetry axis of the graph of g and then the graph itself.

8. Solve graphically the following equations and inequations :
$x^2 - x = 0$; $x^2 - x = 4$; $x^2 - x = 1.5$; $x^2 - x \leqslant 0$; $x^2 - x > 5$; $0.5 < x^2 - x < 2.5$.

8.22 Find the extremum and variations of the functions below.

1. $h_1 : x \mapsto x^2 - 2x - 2$;
2. $h_2 : x \mapsto -x^2 - 5$;
3. $h_3 : x \mapsto x^2 - 10x$;
4. $h_4 : x \mapsto 4x^2 + 12x + 10$;
5. $h_5 : x \mapsto -x^2 + 2x + 1$;
6. $h_6 : x \mapsto x^2 - 7x + \frac{49}{4}$.

8.23 In this exercise, we consider the two functions f et g defined by $f(x) = x^2 - 4$ and $g(x) = x - 2$.

1. A few questions about function g.

  a. What kind of function is g ? What can you deduce about it's graph ?

  b. What are the variations of the function g over $\mathbf{R}$? Explain your answer in a few words.

2. A few questions about the function f.

  a. What kind of function is f ? What can you deduce about it's graph ?

  b. What is the minimum of f over $\mathbf{R}$? Prove it.

  c. Give the variations of the function f in a table.

3. Draw the graphs of the two functions in the same coordinate system.

4. Solve graphically the equation $f(x) = g(x)$ and the inequation $f(x) \leqslant g(x)$.

5. Find graphically the value of x for which the difference between $f(x)$ and $g(x)$ is the greatest over the interval $[-1; 2]$. In the next questions we will call this value α.

In the following questions we will try to check the previous answer by using a third function, h, defined by $h(x) = f(x) - g(x)$.

6. What does it mean for $f(x)$ and $g(x)$ when $h(x) = 0$?

7. What can you say about $h(x)$ when $f(x) < g(x)$?

8. Prove that $h(x) = x^2 - x - 2$.

9. What is the value α for function h ?

10. **a.** Find two real numbers a and b such that $h(x) = (x - a)^2 + b$.

  b. Deduce the exact value of α.

11. Draw the graph of h in the same coordinate system as the graphs of f and g.

8.24 A volley-ball is thrown by a player from an ltitude of 2 meters, with an angle of approximately 11° for the ground. Its altitude as a function of the distance x from the throwing point is then given by the formula

$$h(x) = -0.04x^2 + 0.2x + 2.$$

Part A

1. **a.** Factorize the expression of $h(x)$ by -0.04, to get an expression of the form $k \times g(x)$ where g is a simpler function.

  b. Find two real numbers a and b such that $g(x) = (x - a)^2 + b$. Hint : both numbers are fractions.

  c. Deduce a new expression for $h(x)$.

2. Use the new expression of h to find its maximum and the value of x for which it is reached.

3. Find out the variations of function h and show them in a table.

4. The ball will reach the altitude of 2 meters a second time. Use the symmetries of the curve to find for what value of x it will do so.

5. **a.** Find two real numbers x_1 and x_2, with $x_1 > x_2$ such that $g(x) = (x-x_1)(x-x_2)$.

b. Deduce a new expression for $h(x)$.

6. Use the adequate expression of h to find the solutions of the equation $h(x) = 0$. What does it mean for the ball ?

Part B

After touching the ground, the ball rebounds and its altitude it then given by a second function :

$$m(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 15.$$

1. Find out the maximum of this new function and the value of x for which it is reached.

2. Check that $x = 10$ is a solution of the equation $m(x) = 0$. Why is it important that it is so ?

3. Find the second solution of the equation $m(x) = 0$. What does it mean for the ball ?

Fonctions homographiques

8.25 Soit h la fonction définie par

$$h(x) = \frac{1}{x}.$$

Cette fonction est appelée fonction « inverse ».

1. **a.** Dans un tableau de valeurs, donner sous forme de puissance de 10 les images par la fonction h des nombres suivants : 1 ; 10^{-1} ; 10^{-3} ; 10^{-5}.

b. Que semble-t-il se passer pour $h(x)$ quand x s'approche de 0 ?

c. Que peut-on alors dire l'image de 0 par la fonction h ?

2. Donner l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $h(x)$ existe, c'est à dire l'*ensemble de définition* de h.

3. Dans cette question, nous allons déterminer le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$. Pour cela, on considère deux réels a et b strictement positifs tels que $a < b$.

a. Quelles sont les images de a et b par la fonction h ?

b. Vérifier que $h(a) - h(b) = \frac{b-a}{ab}$.

c. D'après la définition de a et b, que peut-on dire du signe de $b - a$ et de celui de ab ? En déduire le signe de $h(a) - h(b)$.

d. Gràce à la quesiton précédente, ordonner $h(a)$ et $h(b)$. En déduire le sens de variation de h sur $]0; +\infty[$.

4. Utiliser la méthode de la question précédente pour déterminer le sens de variation de h sur $] - \infty; 0[$.

5. Dresser le tableau de variation de h sur $\mathbf{R}$. On fera apparaitre clairement la valeur interdite.

6. La fonction h admet-elle un maximum et/ou un minimum. Si oui, lequel et pour quelle valeur de x.

7. Effectuer la représentation graphique de h sur l'intervalle $[-5; 5]$.

8. Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes.
$\frac{1}{x} = 1.2$; $\frac{1}{x} = 7$; $\frac{1}{x} = -1$; $\frac{1}{x} = 0$; $\frac{1}{x} > 3$; $\frac{1}{x} \leqslant -5$; $2.5 > \frac{1}{x}$; $-1 < \frac{1}{x} \leqslant 1$.

8.26 Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou non. si elle est fausse, expliquer l'erreur commise.

1. La fonction inverse est décroissante et $-3 < -2$, donc $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$.
2. La fonction inverse est décroissante et $-3 < 2$, donc $\frac{1}{-3} > \frac{1}{2}$.
3. La fonction inverse est décroissante donc si $x < 4$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{4}$.
4. La fonction inverse est décroissante donc si $x < -4$, alors $\frac{1}{x} > -\frac{1}{4}$.

8.27 Déterminer l'ensemble de définition de chacun des fonctions homographiques ci-dessous.

1. $h_1(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$;
2. $h_2(x) = \frac{x}{-x+7}$;
3. $h_3(x) = \frac{7x-1}{3x+9}$;
4. $h_4(x) = \frac{x+3}{5x-1}$;
5. $h_5(x) = \frac{3x+5}{8x-12}$;
6. $h_6(x) = \frac{2x+9}{-5x-15}$.

8.28 Dans cet exercice, on considère la fonction homographique définie par

$$f(x) = \frac{3x+10}{x+5}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
2. **a.** Calculer $f(0)$.
   b. En déduire les coordonées du point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.
3. **a.** Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
   b. En déduire les coordonées du point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des abscisses.
4. **a.** Dresser le tableau de signes de la fonction f.
   b. En déduire les valeurs de x pour lesquelles la fonction f est positive.
5. **a.** Utiliser l'ensemble des informations précédentes pour proposer une allure générale de la courbe de f. Les valeurs particulières seront à préciser.
   b. Utiliser la calculatrice pour vérifier votre tracé.

8.29 In this exercise, we consider the two functions f and g defined by

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \text{ and } g(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Part A – About function f

1. What is the domain of function f ?
2. What are the solutions of the equation $f(x) = 0$?
3. **a.** Check that $f(x) = \frac{1}{x} + 1$.
   b. Deduce from the variations of the reciprocal function the variations table of f.
4. Draw the graph of f over the interval $[-5; 5]$.

Part B – About function g

1. What is the domain of function g?
2. What are the solutions of the equation $g(x) = 0$?
3. Draw the graph of g over the interval $[-5; 5]$ on the same graph paper as the graph of f.
4. Build the variations table of g.

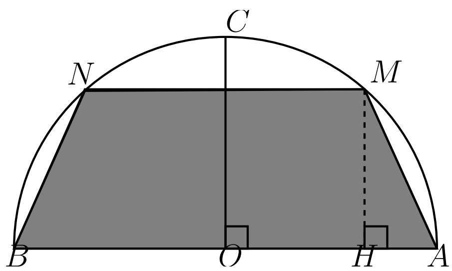
Part C – The intersection point

1. Graphically, find the coordinates of the intersection between the two graphs.
2. Solve the equation $f(x) = g(x)$. How is this result related to the previous one?

Homework #11

8.30

In the figure below, AB is the diameter of the half-circle $\mathscr{C}$ and its length is worth 8cm, O is the midpoint of AB and C is the midpoint of the arc AB.
Let M be a moving point on the arc AC. The parallel to AB through M cuts $\mathscr{C}$ in N and H is the orthogonal projection of M on AB.
The aim of this homework is to find the position of the point M that maximizes the perimeter of the trapezoid $AMNB$.



Part A – Geometric simulation

1. Use Geogebra to draw the figure.
2. Move the point M on the arc AC.
   Conjecture the maximal value of the perimeter of $AMNB$.

Part B – Using a function

1. Let x be the length of AM.
   a. Compute the value of AC. Deduce the definition interval of x.
   b. Prove that $BN = x$.
2. Let $AH = a$.
   Using the Pythagorean theorem in two well chosen triangles, prove successively that :
   a. $MH^2 = 16 - (4 - a)^2$;
   b. $MH^2 = x^2 - a^2$.
3. Deduce from the previous questions that $a = \dfrac{x^2}{8}$ and then that $MN = 8 - \dfrac{x^2}{4}$.
4. Prove that the perimeter of trapezium $AMNB$ is given as a function of x by the formula $-\dfrac{x^2}{4} + 2x + 16$.
5. Find out the position of M for which the perimeter of $AMNB$ is maximal.

1 Table of Contents

Related Episodes

I believe that numbers and functions of Analysis are not the arbitrary result of our minds; I think that they exist outside of us, with the same character of necessity as the things of objective reality, and we meet them or discover them, and study them, as do the physicists, the chemists and the zoologists.

Charles Hermite

Analysis is the art of taming infinity.

Neil Falkner

A lot of mathematicians are a little bit strange in one way or another. It goes with creativity.

Peter Duren