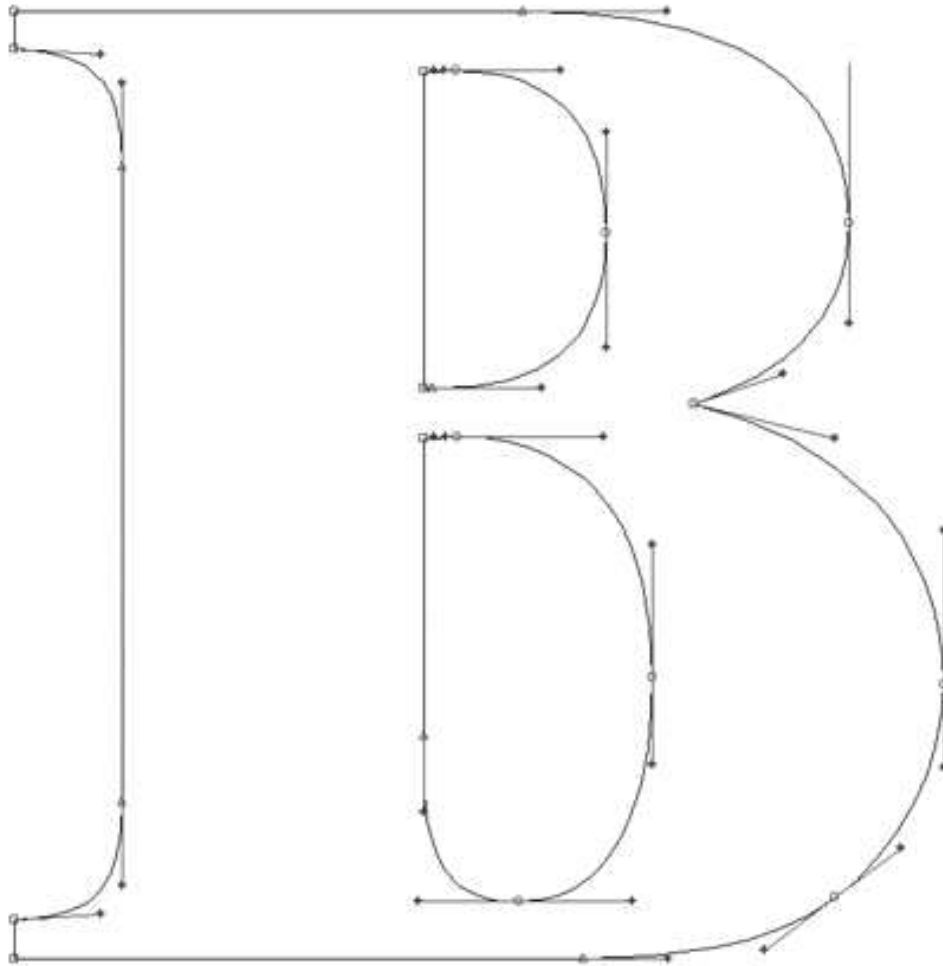


## Chapitre 16

# Courbes de Bézier



*Les courbes de Bézier sont utilisées dans de très nombreuses applications :*

- *commandes de machines numériques ;*
- *programmes de dessin vectoriel (segments courbes) ;*
- *polices True-type ;*
- *morphing : déformation d'images.*

*Le concept a été développé initialement dans le cadre de la construction automobile en France à partir des années 60, par des ingénieurs (Bézier chez Renault, de Casteljaou chez Citroën) qui cherchaient à définir de la manière la plus concise les courbes des carrosseries.*

# 1. INTRODUCTION

---

## 1.1. Historique

---

Au début des années 60, les machines numériques ne savaient usiner de façon précise que des courbes simples comme des paraboles ou des ellipses. Une seconde catégorie d'objets, au contraire, offrait une forme a priori peu précise, déterminée expérimentalement. Les hélices d'avions, les coques de bateaux et les carrosseries de voitures étaient tracées à main levée, sans que l'on puisse décrire leurs formes par une formule mathématique.

Pierre Bézier, ingénieur français diplômé du Conservatoire national des arts et métiers, poursuivait, une carrière à la Régie Renault, atteignant le poste de directeur des méthodes mécaniques.

Les machines à commande numérique de cette époque offraient une programmation limitée. Il fallait les alimenter avec des nombres, ce que l'on savait faire pour des déplacements élémentaires comme des droites, des arcs de cercle, et à la rigueur des ellipses. Mais il n'était pas question de programmer des courbes quelconques, tracées à la main, faute d'une définition numérique de celles-ci. Pierre Bézier chercha donc comment traduire mathématiquement une courbe, puis une surface, dessinées à main levée. Il lui fallait concevoir un système capable de gérer des courbes gauches, c'est-à-dire de manipuler des surfaces en 3D, d'où la nécessité de définir un modèle mathématique qui ne soit pas limité à des courbes en deux dimensions. Enfin, l'ingénieur entendait inventer un système complet pour créer un objet en volume à partir d'un dessin, le tout avec une rapidité d'exécution suffisante, et compréhensible intuitivement.

Mais ses recherches n'étaient pas entièrement originales. Dès 1958, un mathématicien employé par Citroën, Paul de Casteljaou, s'était attaqué au même problème. Paul de Casteljaou était chargé de numériser une courbe, une fois celle-ci tracée, sans se poser la question d'une correction a posteriori. Il définissait ses courbes comme caractérisées par des pôles, d'une façon nettement moins parlante que les points de contrôle de Bézier.

L'aventure de Pierre Bézier aurait pu s'arrêter là. Mais un groupe de développeurs liés à Apple créa un langage adapté à la future imprimante laser conçue pour le Mac. Il s'agissait de trouver un moyen de définir mathématiquement une courbe, comme le tracé d'un caractère, avant de l'envoyer à l'imprimante. L'un de ces développeurs connaissait le travail du Français. Tout naturellement, il choisit les courbes de Bézier comme base du langage PostScript et fonda la société Adobe. Microsoft adopta à son tour les polices true-type à partir de Windows 3.1. Ces polices utilisent les courbes de Bézier pour définir les caractères aux formes arrondies.

## 1.2. Exemples progressifs de courbes de Bézier

---

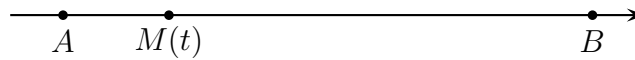
### 1.2.i) Courbe de Bézier de degré 1

On considère deux points  $A$  et  $B$  et soit  $M(t)$  le barycentre de  $(A, 1 - t)(B, t)$ .

- si  $t = 0$  alors  $M$  est en  $A$  ;

- si  $t = 0,5$  alors  $M$  est au milieu de  $[AB]$  ;
- si  $t = 1$  alors  $M$  est en  $B$ .

Quand  $t$  parcourt l'intervalle  $[0, 1]$ , il est clair que le point  $M(t)$  décrit tout le segment  $[AB]$ .



#### Définition 1 :

Le segment  $[AB]$  est la **courbe de Bézier** de degré 1 avec **points de contrôle**  $A$  et  $B$ .  
Les polynômes  $1 - t$  et  $t$  sont les polynômes ou **poinds de Bernstein** de degré 1.

### 1.2.ii) Courbe de Bézier de degré 2

Construisons une autre courbe en rajoutant une 2ème étape à ce qui précède :

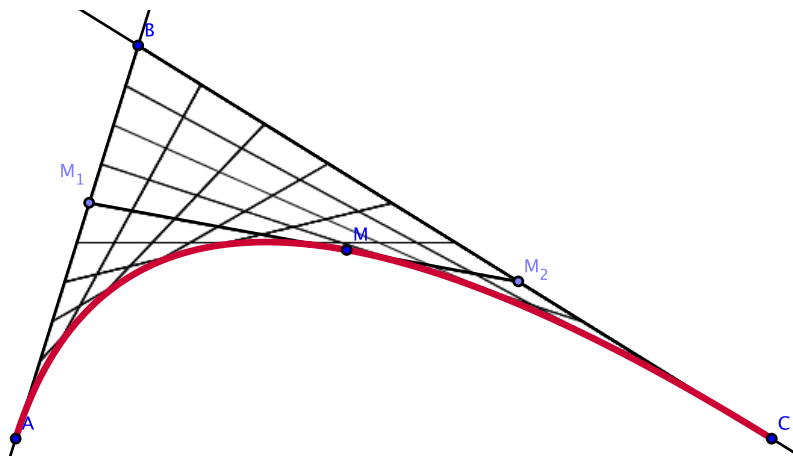
1ère étape : 2 courbes de Bézier de degré 1 :

- Soit  $M_1(t)$  le barycentre de  $(A, 1 - t)(B, t)$  ;  $M_1(t)$  décrit  $[AB]$ .
- Soit  $M_2(t)$  le barycentre de  $(B, 1 - t)(C, t)$  ;  $M_2(t)$  décrit  $[BC]$ .

2ème étape :

- Soit  $M(t)$  le barycentre de  $(M_1, 1 - t)(M_2, t)$ .

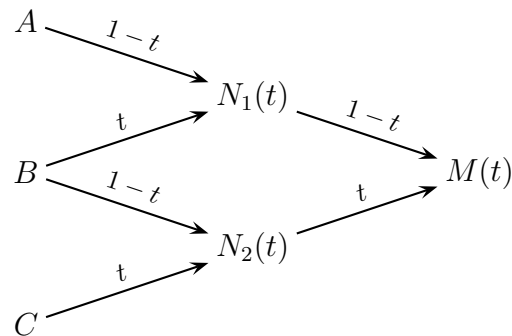
On fait décrire à  $t$  le segment  $[0; 1]$ .  $M_1$  parcourt alors  $[AB]$  et  $M_2$  parcourt alors  $[BC]$ . Le point  $M$  décrit lui la courbe ci-dessous.



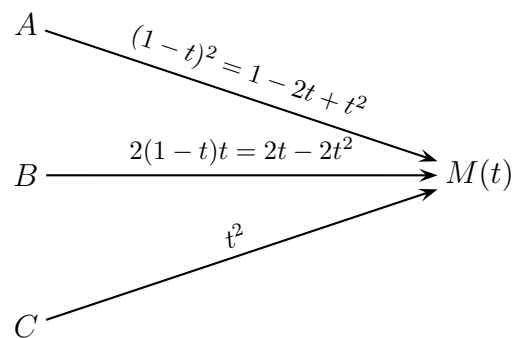
On remarque que :

- $M(t)$  décrit alors une courbe de degré 2 qui, par définition, commence en  $A$  et se finit en  $C$ , et a pour tangentes  $(AB)$  en  $A$  et  $(BC)$  en  $C$ .
- En tout point  $M$ , la tangente à la courbe est le segment  $[M_1M_2]$ .
- $M(t)$  se situe à la même proportion du segment  $[M_1M_2]$  que  $M_1$  par rapport au segment  $[AB]$  ou  $M_2$  par rapport au segment  $[BC]$ .

Le schéma ci-dessous, appelé schéma pyramidal de Casteljau, permet de résumer la construction itérative des barycentres qui a été faite.



À partir de celui-ci et en utilisant les propriétés d'association du barycentre, on établit le schéma condensé de Bernstein :



Ainsi, en prenant le point  $O$  comme origine, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = (1-t)^2 \overrightarrow{OA} + 2t(1-t) \overrightarrow{OB} + t^2 \overrightarrow{OC} ;$$

ce qui se traduit sur les coordonnées par :

$$\begin{cases} x_M(t) = (1-t)^2 x_A + 2t(1-t)x_B + t^2 x_C \\ y_M(t) = (1-t)^2 y_A + 2t(1-t)y_B + t^2 y_C \end{cases}$$

#### Définition 2 :

$M(t)$  décrit la courbe de Bézier de degré 2 avec 3 points de contrôle  $A$ ,  $B$  et  $C$ .  
Les polynômes  $(1-t)^2$ ,  $2t(1-t)$  et  $t^2$  sont les polynômes - poids de Bernstein de degré 2.

### 1.2.iii) Courbe de Bézier de degré 3

Construisons une autre courbe en rajoutant une 3ème étape à ce qui précède :

1ère étape : 3 courbes de Bézier de degré 1 :

- Soit  $M_1(t)$  le barycentre de  $(A, 1-t)(B, t)$  ;
- Soit  $M_2(t)$  le barycentre de  $(B, 1-t)(C, t)$  ;

- Soit  $M_3(t)$  le barycentre de  $(C, 1 - t)(D, t)$ .

2ème étape : 2 courbes de Bézier de degré 2 :

- Soit  $N_1(t)$  le barycentre de  $(M_1, 1 - t)(M_2, t)$  ;
- Soit  $N_2(t)$  le barycentre de  $(M_2, 1 - t)(M_3, t)$ .

3ème étape : 1 courbe de Bézier de degré 3 :

- Soit  $M(t)$  le barycentre de  $(N_1, 1 - t)(N_2, t)$  ;

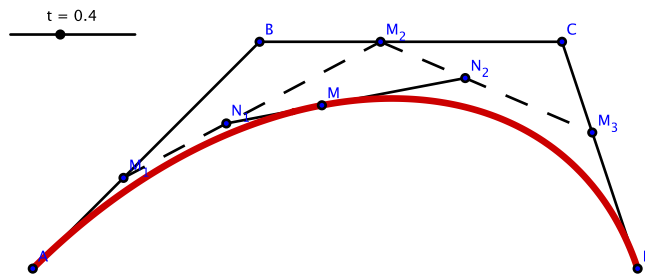


Schéma pyramidal de Casteljaou

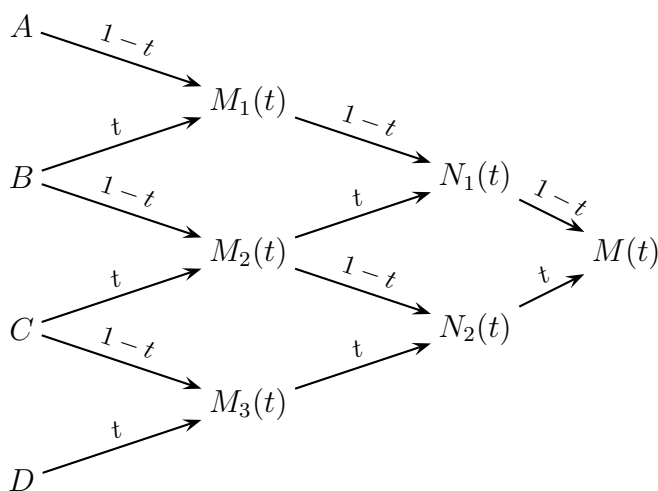
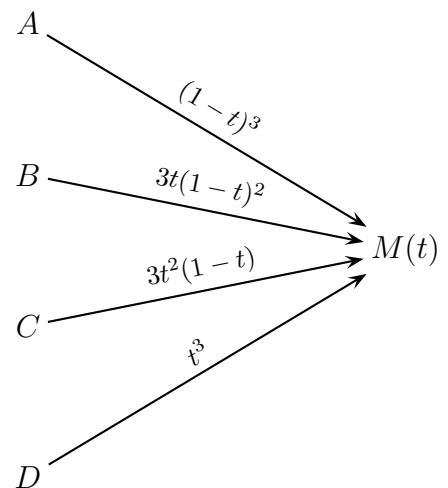


Schéma condensé de Bernstein



En prenant le point  $O$  comme origine, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = (1 - t)^3 \overrightarrow{OA} + 3t(1 - t)^2 \overrightarrow{OB} + 3t^2(1 - t) \overrightarrow{OC} + t^3 \overrightarrow{OD} ;$$

La représentation paramétrique de la courbe est donc :

$$\begin{cases} x_M(t) = (1 - t)^3 x_A + 3t(1 - t)^2 x_B + 3t^2(1 - t) x_C + t^3 x_D \\ y_M(t) = (1 - t)^3 y_A + 3t(1 - t)^2 y_B + 3t^2(1 - t) y_C + t^3 y_D \end{cases}$$

**Définition 3 :**

$M(t)$  décrit la courbe de Bézier de degré 3 avec 4 points de contrôle  $A, B, C$  et  $D$ .  
Les Polynômes  $(1-t)^3, 3t(1-t)^2, 3t^2(1-t)$  et  $t^3$  sont les polynômes - poids de Bernstein du degré 3.

*Remarque* : Intérêt du degré 3 : en plus des courbes d'une plus forte régularité, il permet de dessiner des plis (comme ceux de la cubique d'équation :  $y = x^3 - 3x$ , en  $x = 1$  ou  $-1$ ), ou des points d'inflexion (comme celui de la cubique d'équation :  $y = x^3 - 3x$ , en  $x = 0$ ), ou des points de rebroussements (comme le point médian dans le chiffre 3), ou des points doubles (comme le croisement dans la lettre alpha), ce que le degré 2, avec ses arcs de paraboles, ne sait pas faire !

Dans la pratique, on se limite généralement à des courbes de Bézier de degré 3.

### 1.3. Conclusion et remarques

Cette construction, itérative, peut être poursuivie bien au delà du degré 3 (qui suffit généralement), jusqu'à n'importe quel degré  $k$ . On obtient alors une courbe de Bézier de degré  $k$ , à  $k+1$  points de contrôle.

D'une manière générale, une courbe de Bézier est une courbe paramétrique qui permet très simplement, par construction itérée de barycentres, de réaliser un arc de courbe continu d'extrémités imposées, et avec des points de pontrôle qui définissent les tangentes à cette courbe.

Une courbe de Bézier revient à réaliser une sorte de moyenne pondérée d'une suite de segments contigus, bornés par les points de contrôle.

*Remarques* :

- Les propriétés du Barycentre (conservé par transformation affine quelconque) entraînent la chose suivante : Appliquer une même transformation affine à tous les points de contrôle revient à appliquer cette transformation affine à l'ensemble de la courbe.
- Après traduction de cette construction en coordonnées du point  $M(t)$  décrivant la courbe de Bézier, on se rend compte que les points de contrôle définissent plus exactement les vitesses (pour Bézier de degré 2), voire les accélérations (pour Bézier de degré 3) du point  $M(t)$ .
- Les courbes de Bézier sont à la base des polices vectorielles de caractères et images vectorielles utilisées actuellement dans nos ordinateurs.

Par exemple, mettre une lettre de police vectorielle en italiques revient ainsi à déplacer ses points de contrôle supérieurs vers la droite d'autant plus qu'ils sont éloignés de la base de la lettre, invariante (par une transformation affine appelée "cisaillement"); de même, en dessin d'animation, le morphing d'une courbe est beaucoup plus simple à décrire par la seule dynamique de ses points de contrôle.

## 2. PRÉSENTATION PAR VECTEURS ET CONTRAINTES

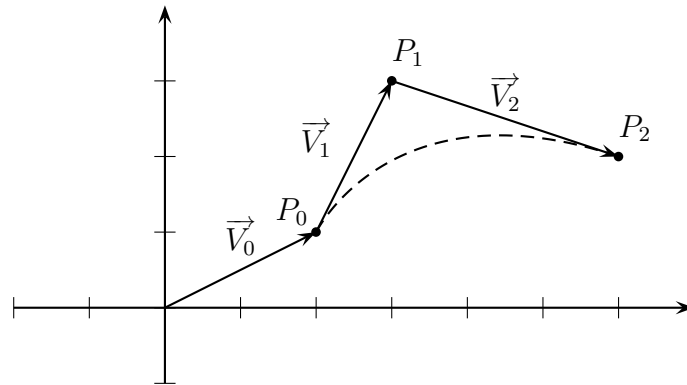
### 2.1. Cas de 3 vecteurs

Considérons trois points  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$  et les trois vecteurs associés  $\vec{V}_0 = \overrightarrow{OP_1}$ ,  $\vec{V}_1 = \overrightarrow{P_0P_1}$  et  $\vec{V}_2 = \overrightarrow{P_1P_2}$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $M(t)$  défini par  $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_0 + f_1(t)\vec{V}_1 + f_2(t)\vec{V}_2$ ,  $f_1$  et  $f_2$  étant des polynômes de degré 2, de la variable  $t$  dans  $[0; 1]$ .

On impose les contraintes :

- la courbe a pour extrémité  $P_0$  (pour  $t = 0$ ) et  $P_2$  (pour  $t = 1$ );
- le vecteur  $\vec{V}_1$  est tangent à la courbe en  $P_0$ ;
- le vecteur  $\vec{V}_2$  est tangent à la courbe en  $P_1$ .



On doit donc avoir :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(0) = \vec{V}_0 \\ \overrightarrow{OM}(1) = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \\ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}(0) \text{ colinéaire à } \vec{V}_1 \\ \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}(1) \text{ colinéaire à } \vec{V}_2 \end{cases}$$

comme  $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt} = f_1'(t)\vec{V}_1 + f_2'(t)\vec{V}_2$ , on a donc :

$$\begin{cases} f_1(0) = 0 \text{ et } f_2(0) = 0 \\ f_1(1) = 1 \text{ et } f_2(1) = 1 \\ f_2'(0) = 0 \text{ et } f_1'(0) = \text{cte non nulle} \\ f_1'(1) = 0 \text{ et } f_2'(1) = \text{cte non nulle} \end{cases}$$

Puisque  $f_1$  et  $f_2$  sont du deuxième degré, on a  $f_1(t) = at^2 + bt + c$  et  $f_2(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ . Le

système devient alors :

$$\begin{cases} c = 0 \text{ et } \gamma = 0 \\ a + b = 1 \text{ et } \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 0 \text{ et } 2a + b = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

On en déduit

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_0 + (-t^2 + 2t)\vec{V}_1 + t^2\vec{V}_2$$

donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \overrightarrow{OP_0} + (-t^2 + 2t)\overrightarrow{P_0P_1} + t^2\overrightarrow{P_1P_2} \\ &= \overrightarrow{OP_0} + (-t^2 + 2t)(\overrightarrow{P_0O} + \overrightarrow{OP_1}) + t^2(\overrightarrow{P_1O} + \overrightarrow{OP_2}) \\ &= (t^2 - 2t + 1)\overrightarrow{OP_0} + (-2t^2 + 2t)\overrightarrow{OP_1} + t^2\overrightarrow{OP_2} \end{aligned}$$

On retrouve la définition par points de contrôle et polynôme de Bernstein de degré 2.

## 2.2. Cas de 4 vecteurs

Dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on considère quatre points  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$  et les quatre vecteurs associés :

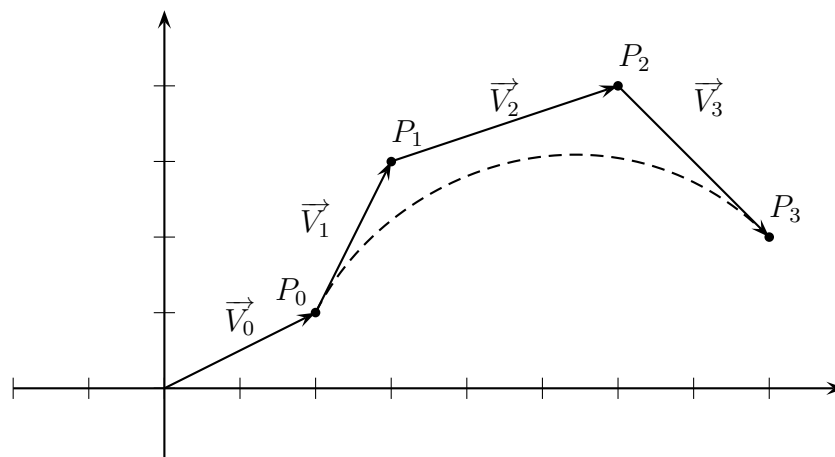
$$\vec{V}_0 = \overrightarrow{OP_1} \quad ; \quad \vec{V}_1 = \overrightarrow{P_0P_1} \quad ; \quad \vec{V}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} \quad \text{et} \quad \vec{V}_3 = \overrightarrow{P_2P_3}.$$

Soit  $M(t)$  défini par  $\overrightarrow{OM}(t) = \vec{V}_0 + f_1(t)\vec{V}_1 + f_2(t)\vec{V}_2 + f_3(t)\vec{V}_3$ ,  $f_1, f_2$  et  $f_3$  étant des polynômes de degré 3 de la variable  $t$  dans  $[0; 1]$ .

On impose les contraintes :

- la courbe a pour extrémité  $P_0$  (pour  $t = 0$ ) et  $P_3$  (pour  $t = 1$ );
- le vecteur  $\vec{V}_1$  (et donc la droite  $(P_0P_1)$ ) est tangent à la courbe en  $P_0$ ;
- le vecteur  $\vec{V}_3$  (et donc la droite  $(P_2P_3)$ ) est tangent à la courbe en  $P_3$ ;

- la concavité de la courbe en  $P_0$  est géré par  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$  (admis);
- la concavité de la courbe en  $P_3$  est géré par  $\vec{V}_2$  et  $\vec{V}_3$  (admis);



Comme fait-ci dessus, on montre que les contraintes se traduisent par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{OM}(0) = \vec{V}_0 \\ \overline{OM}(1) = \vec{V}_0 + \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 \\ \frac{d\overline{OM}}{dt}(0) \text{ colinéaire à } \vec{V}_1 \\ \frac{d\overline{OM}}{dt}(1) \text{ colinéaire à } \vec{V}_3 \\ \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2}(0) \text{ independant de } \vec{V}_3 \\ \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2}(1) \text{ independant de } \vec{V}_3 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = 0 \\ f_1(1) = f_2(1) = f_3(1) = 1 \\ f'_2(0) = f'_3(0) = 0 \\ f'_1(1) = f'_2(1) = 0 \\ f''_3(0) = 0 \\ f''_1(1) = 0 \end{array} \right.$$

En posant  $f_1(t) = at^3 + bt^2 + ct + d, \dots$ , on obtient que

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(t) = t^3 - 3t^2 + 3t \\ f_2(t) = -2t^3 + 3t^2 \\ f_3(t) = t^3 \end{array} \right.$$

On retrouve les polynômes de Bernstein de degré 3.

### 3. COURBES DE BÉZIER

#### Définition 4 : Polynômes de Bernstein

Soient  $n$  un entier naturel non nul et  $i$  un entier naturel tel que  $0 \leq i \leq n$ . On appelle (fonction) **polynôme de Bernstein**, les fonctions polynômes définies par :

$$\mathcal{B}_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$



## Définition 5 : Courbes de Bézier

Soient, dans le plan muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $n + 1$  points  $P_0, P_1, \dots, P_n$ . À tout nombre réel  $t \in [0, 1]$ , on associe le point  $M(t)$  défini par :

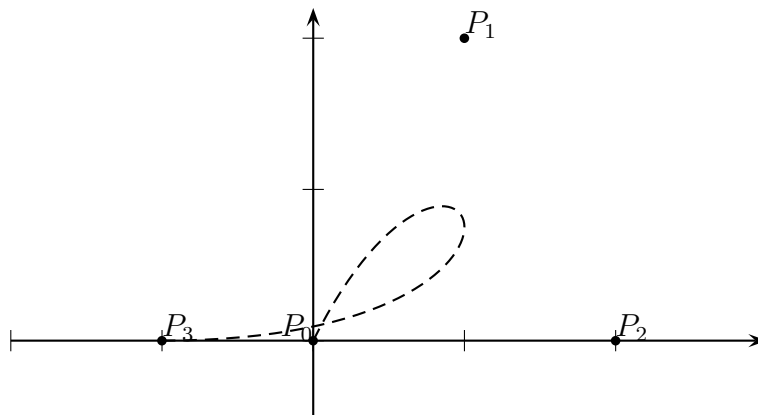
$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{i=n} \mathcal{B}_{i,n}(t) \overrightarrow{OP}_i.$$

où  $\mathcal{B}_{i,n}(t) = C_i^n t^i (1-t)^{n-i}$  sont les polynômes de Bernstein.

L'ensemble des points  $M(t)$  lorsque  $t$  décrit l'intervalle  $[0, 1]$  est une courbe  $\mathcal{C}$  appelée **courbe de Bézier de points de contrôle  $P_0, P_1, \dots, P_n$** .

*Exemple :* On considère les quatre points de contrôle  $P_0(0; 0)$ ,  $P_1(1; 2)$ ,  $P_2(2; 0)$  et  $P_3(-1; 0)$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= \sum_{i=0}^{i=3} \mathcal{B}_{i,3}(t) \overrightarrow{OP}_i \\ &= \mathcal{B}_{0,3}(t) \overrightarrow{OP}_0 + \mathcal{B}_{1,3}(t) \overrightarrow{OP}_1 + \mathcal{B}_{2,3}(t) \overrightarrow{OP}_2 + \mathcal{B}_{3,3}(t) \overrightarrow{OP}_3 \\ &= (1-t)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (1-3t+3t^2+t^3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (3t-6t^2+3t^3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (3t^2-3t^3) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (t^3) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4t^3+3t \\ 6t^3-12t^2+6t \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## Théorème 1 (admis) : Propriété d'une courbe de Bézier

On établit que pour une courbe de Bézier :

- la courbe est de degré  $n$  si elle est à  $n + 1$  points de contrôle ;
- la courbe passe par  $P_0$  et  $P_n$  ;
- la droite  $(P_0P_1)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $P_0$  ;
- et que si  $P_{n-1}$  et  $P_n$  sont distincts, la droite  $(P_{n-1}P_n)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $P_n$ .

## 4. EXERCICES

### 4.1. Introduction

**16.1** Dans un repère orthonormée, on considère les points  $A(0; 0)$ ,  $B(2; 2)$ , et  $C(4; 0)$ .

1. Pour  $t \in [0; 1]$ , on considère le point  $N_1(t)$  barycentre de  $(A, 1 - t)$  et  $(B, t)$  et le point  $N_2(t)$  barycentre de  $(B, 1 - t)$  et  $(C, t)$ .
  - a. Exprimer  $\overrightarrow{ON_1(t)}$  en fonction de  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$ .
  - b. En déduire que  $N_1(t)$  a pour coordonnées  $(2t; 2t)$ .
  - c. En procédant de la même manière, montrer que  $N_2(t)$  a pour coordonnées  $(2 + 2t; 2 - 2t)$ .
2. Pour  $t \in [0; 1]$ , on considère le point  $M(t)$  barycentre de  $(N_1(t), 1 - t)$  et  $(N_2(t), t)$ .
  - a. Déterminer les coordonnées, en fonction de  $t$ , de  $M(t)$ .
  - b. Dresser le tableau des variations conjointes de  $x(t)$  et  $y(t)$ .
  - c. Tracer la courbe  $\mathcal{C}$  de l'ensemble des points  $M(t)$  obtenus lorsque  $t$  parcourt l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - d.
    - i. Montrer que  $A$  et  $C$  sont des points de  $\mathcal{C}$ .
    - ii. Montrer que  $(AB)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $A$ .
    - iii. Montrer que  $(BC)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $C$ .
    - iv. Montrer que la droite  $(N_1(t)N_2(t))$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M(t)$ .

**16.2** *Polynômes de Bernstein.*

1. Développer et réduire les polynômes de Bernstein :

$$B_{0,3}(t) \quad ; \quad B_{1,3}(t) \quad ; \quad B_{2,3}(t) \quad \text{et} \quad B_{3,3}(t)$$

2. Vérifier que  $\sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) = 1$ .

**16.3** Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On admet que la courbe de Bézier  $\mathcal{C}$  associée à trois points  $A$ ,  $B$ , et  $C$  a pour représentation paramétrique

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1 - t)^2 \overrightarrow{OA} + (-2t^2 + 2t) \overrightarrow{OB} + t^2 \overrightarrow{OC}.$$

où le nombre réel  $t$  varie dans  $[0; 1]$ .

1. On donne les coordonnées des points :

$$A(1; 2) \quad ; \quad B(2; 4) \quad ; \quad C(4; 3)$$

- a. Exprimer en fonction de  $t$  les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  de  $M(t)$ .
- b. Étudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[0; 1]$  et regrouper les résultats dans un même tableau.
- c. Préciser les tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  aux points  $M(0)$ ,  $M(\frac{1}{2})$  et  $M(1)$  obtenus pour  $t = 0$ ,  $t = 0,5$  et  $t = 1$ .  
Construire ces tangentes et la courbe  $\mathcal{C}$ .

2. On remplace le point  $B(2; 4)$  par le point  $B'(3; 1)$ .  
Reprendre les trois questions de la partie 1.
3. Le changement du point  $B$  en  $B'$  a-t-il une influence globale ou locale sur la courbe ?

## 4.2. Bézier

**16.4** On considère les points  $P_0(0; 0)$ ,  $P_1(1; 2)$ ,  $P_2(2; 0)$  et  $P_3(-1; 0)$ .

1. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe de Bézier associée à ces 4 points de contrôle.  
Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{C}$  : 
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
2. Établir le tableau des variations conjointes de  $f$  et  $g$ .
3. Dans le repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  placer les points  $M(\frac{1}{2})$  et  $M(\frac{1}{3})$  et leurs tangentes respectives, puis construire la courbe  $\mathcal{C}$ .
4. Vérifier que la droite  $(P_0P_1)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $P_0$  et que la droite  $(P_2P_3)$  est tangente à  $\mathcal{C}$  en  $P_3$ .

**16.5** Le plan est muni d'un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère les points  $P_0(0; 0)$ ,  $P_1(1; 2)$ ,  $P_2(3; 2)$  et  $P_3(4; 0)$ .

1. Déterminer une représentation paramétrique de la courbe  $\mathcal{C}$  de Bézier associée aux 4 points de contrôle  $P_0$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .
2. Établir le tableau des variations conjointes de  $f$  et  $g$  : 
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$
3. Préciser les points où la tangente est parallèle à l'un des axes du repère.
4. Tracer la courbe de Bézier dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
5. Reprendre les questions précédentes avec :
  - a.  $P_0(0; 0)$ ,  $P_1(-1; 2)$ ,  $P_2(3; 1)$  et  $P_3(0; 0)$ .
  - b.  $P_0(0; 0)$ ,  $P_1(2; 2)$ ,  $P_2(0; 2)$  et  $P_3(2; 0)$ .

**16.6** *Raccordement de deux courbes.*

On considère les points  $P_0(0; 0)$ ,  $P_1(1; 1)$ ,  $P_2(3; 0)$ ,  $P_3(5; -1)$  et  $P_4(1; -1)$ .

Le plan est rapporté à un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $\mathcal{C}_1$  la courbe de Bézier associée à  $P_0$ ,  $P_1$  et  $P_2$ .
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{C}_1$  : 
$$\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = g_1(t) \end{cases}$$
  - b. Établir le tableau des variations conjointes de  $f_1$  et  $g_1$ .
  - c. Tracer  $\mathcal{C}_1$ .
2. Soit  $\mathcal{C}_2$  la courbe de Bézier associée à  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ .
  - a. Déterminer une représentation paramétrique de  $\mathcal{C}_2$  : 
$$\begin{cases} x = f_2(t) \\ y = g_2(t) \end{cases}$$
  - b. Établir le tableau des variations conjointes de  $f_2$  et  $g_2$ .
  - c. Tracer  $\mathcal{C}_2$  dans le même repère que précédemment.
3. Vérifier qu'en  $P_2$ ,  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ont la même tangente.

### 4.3. Annales

#### 16.7 France 2008 CPI

Le plan est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  où l'unité graphique est 2 centimètres. On appelle courbe de Bézier définie par les points de définition  $A_i (0 \leq i \leq n)$  l'ensemble des points  $M(t)$  tels que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OA}_i \text{ où } B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}.$$

#### A. Construction d'une courbe de Bézier $C_1$

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier  $C_1$  définie par les quatre points de définition  $A(0; 1); B(2; 1); C(0; 2); D(0; 4)$ , dans cet ordre.

1. Démontrer que, pour tout  $t$  de  $[0; 1]$ ,  $B_{1,3}(t) = 3t - 6t^2 + 3t^3$ .
2. On admet que, pour tout  $t$  de  $[0; 1]$   
 $B_{0,3}(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$  ;  $B_{2,3}(t) = 3t^2 - 3t^3$  et  $B_{3,3}(t) = t^3$ .  
 En déduire qu'un système d'équations paramétriques de la courbe  $C_1$  est :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y = g_1(t) = 1 + 3t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

3. Étudier les variations des fonctions  $f_1$  et  $g_1$  sur  $[0; 1]$  et rassembler les résultats dans un tableau unique.
4. Préciser les coordonnées des points de la courbe  $C_1$  où les tangentes sont parallèles aux axes de coordonnées.
5. Montrer que la droite  $(AB)$  est tangente à la courbe  $C_1$  au point A.
6. Tracer la tangente  $(AB)$  et la courbe  $C_1$  dans le repère donné au début de l'énoncé.

#### B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier $C_2$

On considère la courbe de Bézier  $C_2$  définie par les trois points de définition  $E(-2; 0); F(-3; 1)$  et  $A(0; 1)$  dans cet ordre.

**Les deux résultats suivants n'ont pas à être démontrés.**

- Un système d'équations paramétriques de la courbe  $C_2$  est :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2 - 2t + 4t^2 \\ y = g_2(t) = 2t - t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1].$$

- Le tableau de variations conjointes des fonctions  $f_2$  et  $g_2$  est le suivant :

$t$	0	$\frac{1}{4}$	1		
$f_2'(t)$	-2	-	0	+	6
$f_2(t)$	-2		-2,25		0
$g_2'(t)$	2		+		0
$f_2(t)$	0				1

1. Construire sur la figure de la partie A le point  $M_0$  tel que  $\overrightarrow{EM_0} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$ , le point  $M_1$  tel que  $\overrightarrow{FM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FA}$  et le point  $R$  tel que  $\overrightarrow{M_0R} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_0M_1}$ .
2. Calculer les coordonnées des points  $M_0$ ,  $M_1$  et  $R$ .
3. Montrer que le point  $R$  est le point de la courbe  $\mathcal{C}_2$  de paramètre  $\frac{1}{2}$ .
4. Montrer que la droite (AF) est tangente à la courbe  $\mathcal{C}_2$  au point A.
5. Montrer que les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  ont la même tangente au point A.
6. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_2$  sur la même figure que la courbe  $\mathcal{C}_1$ .

### 16.8 France 2006 CPI

On envisage de créer une nouvelle police de caractère. On s'intéresse plus précisément à la lettre P et on utilise des courbes de Bézier pour définir les contours de cette lettre.

Le plan est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité graphique 2 centimètres.

1. On souhaite construire la courbe de Bézier  $\mathcal{C}_1$  définie par les points de définition suivants donnés par leurs coordonnées  $A_0(0; 3)$ ;  $A_1(4; 3)$ ;  $A_2(4; 6)$  et  $A_3(0; 6)$ .  
On rappelle que la courbe de Bézier définie par les points de définition  $A_i(0 \leq i \leq n)$  est l'ensemble des points  $M(t)$  tels que

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_0^n B_{i,n}(t) \overrightarrow{OA_i} \text{ où } B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

- a. Développer, réduire et ordonner les polynômes  $B_{i,3}(t)$ , avec  $0 \leq i \leq 3$ .
- b. On note  $(f_1(t), g_1(t))$  les coordonnées du point  $M_1(t)$  de la courbe  $\mathcal{C}_1$ .  
Vérifier que, pour tout  $t$  de  $[0; 1]$ ,  $f_1(t) = 12t - 12t^2$ .  
On admettra dans la suite de l'exercice que  $g_1(t) = 3 + 9t^2 - 6t^3$ .

Un système d'équations paramétriques de la courbe  $\mathcal{C}_1$  est donc :

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 12t - 12t^2 \\ y = g_1(t) = 3 + 9t^2 - 6t^3 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0; 1]$$

- c. Étudier les variations de  $f_1$  et  $g_1$  sur  $[0 ; 1]$  et rassembler les résultats dans un tableau unique.
- d. Préciser les coordonnées des points de  $\mathcal{C}_1$  où les tangentes à  $\mathcal{C}_1$  sont parallèles à l'axe des abscisses.
- e. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_1$  et les tangentes parallèles aux axes sur une feuille de papier millimétré.
2. Soit  $\mathcal{C}_2$  une courbe de Bézier définie par les trois points de définition suivants donnés par leurs coordonnées :  $A_0(0 ; 3)$  ;  $A_4\left(0 ; \frac{1}{4}\right)$  ;  $A_5(-2 ; 0)$ .
- La courbe  $\mathcal{C}_2$  est définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = f_2(t) = -2t^2 \\ y = g_2(t) = 3 - \frac{11}{2}t + \frac{5}{2}t^2 \end{cases} \text{ où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0 ; 1]$$

Le tableau des variations conjointes de  $f_2$  et  $g_2$  est le suivant :

$t$	0		1
$f_2'(t)$	0	—	—4
$f_2(t)$	0	↘	
			—2
$g_2'(t)$	— $\frac{11}{2}$	—	— $\frac{1}{2}$
$g_2(t)$	3	↘	
			0

- a. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_2$  au point  $A_5$ .  
Quelle est la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_2$  en  $A_0$  ?
- b. Tracer la courbe  $\mathcal{C}_2$  dans le même repère que la courbe  $\mathcal{C}_1$ . Construire la tangente à la courbe  $\mathcal{C}_2$  en  $A_5$  ainsi que le point  $A_4$  et le segment  $[A_0A_3]$ .

### 16.9 CPI, France 2003

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

On considère la courbe H définie par les équations paramétriques :

$$\begin{cases} x = f(t) = 4t^3 + 15t^2 - 18t + 1 \\ y = g(t) = -2t^3 + 6t \end{cases}$$

où  $t$  est un paramètre réel appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,

Partie A

1. Étudier les variations des fonctions  $f$  et  $g$  sur  $[0 ; 1]$  et rassembler les résultats obtenus dans un même tableau. On indiquera en particulier les images de  $0$ ,  $\frac{1}{2}$  et  $1$  ainsi que la valeur des dérivées en ces points.
2. Soit  $A(1 ; 0)$  et  $B(-5 ; 2)$ . Montrer que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est tangent à H en A.
3. Tracer H ainsi que le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

*Partie B*

En fait, la courbe H est une courbe de Bézier définie à partir de quatre points de contrôle A, B, C et D, les coordonnées de D étant  $(2 ; 4)$ .

1. Vérifier que la courbe part bien de A pour arriver en D.
2. On cherche dans cette question à déterminer les coordonnées du point C.
  - a. En utilisant le fait que  $\overrightarrow{DC}$  est tangent à H en D, déterminer l'ordonnée de C.
  - b. On rappelle qu'une courbe de Bézier à 4 points de contrôle est définie par la relation :

$$(*) \quad \overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t) \overrightarrow{OP}_i,$$

où les  $P_i$  sont les points de contrôle et  $B_{i,3}(t)$  sont les polynômes de Bernstein définis par  $B_{i,3}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$  avec  $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ .

- i. Donner l'expression développée des polynômes de Bernstein :  $B_{0,3}(t)$ ,  $B_{1,3}(t)$ ,  $B_{2,3}(t)$  et  $B_{3,3}(t)$ .
- ii. À l'aide de l'égalité (\*), déterminer  $x_C$  l'abscisse de C. Tracer alors le vecteur  $\overrightarrow{DC}$ .

# Table des matières

<b>1</b>	Introduction . . . . .	1
<b>1.1</b>	Historique . . . . .	1
<b>1.2</b>	Exemples progressifs de courbes de Bézier . . . . .	1
<b>1.3</b>	Conclusion et remarques . . . . .	5
<b>2</b>	Présentation par vecteurs et contraintes . . . . .	5
<b>2.1</b>	Cas de 3 vecteurs . . . . .	5
<b>2.2</b>	Cas de 4 vecteurs . . . . .	6
<b>3</b>	Courbes de Bézier . . . . .	7
<b>4</b>	Exercices . . . . .	9
<b>4.1</b>	Introduction . . . . .	9
<b>4.2</b>	Bézier . . . . .	10
<b>4.3</b>	Annales . . . . .	11