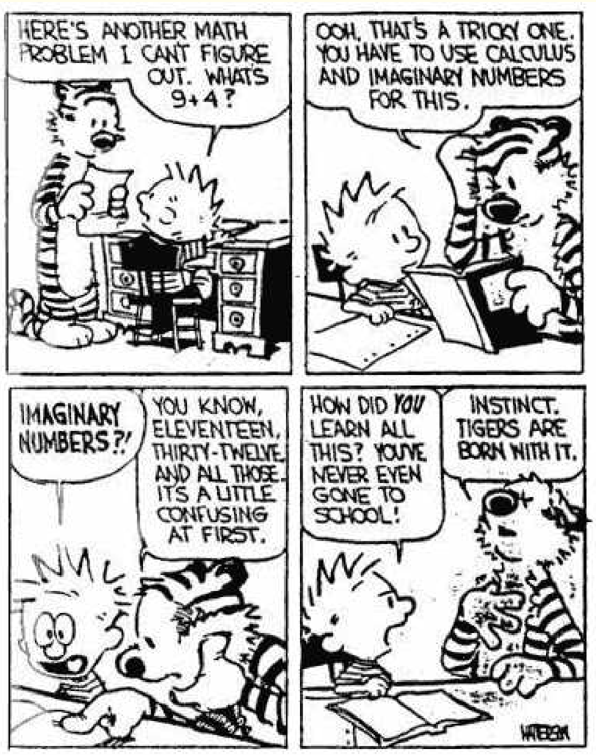
Section technicien supérieur
Cours de mathématiques

Chapitre 2
Nombres complexes



Calvin and Hobbes, by Bill Waterson

Les nombres complexes portent bien leur nom ! Ils interviennent partout : en algèbre, en analyse, en géométrie, en électronique, en traitement du signal, en musique, etc. Et en plus, ils n'ont jamais la même apparence : tantôt sous forme algébrique, tantôt sous forme trigonométrique, tantôt sous forme exponentielle, … Leur succès vient en fait de deux propriétés : en travaillant sur les nombres complexes, tout polynôme admet un nombre de racines égal à son degré et surtout ils permettent de calculer facilement en dimension 2.

Aymar de Saint-Seine
Année scolaire 2010–2011

1. Rappels

Définition 1 : Ensemble des nombres complexes

On appelle $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres de la forme $x + \mathrm{i}y$, où $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$ et i est le nombre vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$. Cet ensemble est appellé **ensemble des nombres complexes**.

Remarque : La notation i fut introduite par Euler (Bâle 1707 - Saint Pétersbourg 1783). Dans les exercices et le cours, on notera parfois j à la place de i pour éviter la confusion avec la notation de l'intensité utilisée en électricité.

Les règles de calculs (addition, dévellopement, factorisation) valables pour les nombres réels sont aussi valables pour les nombres complexes.

Exercice résolu 1 :

On donne $z_1 = -2 + 3\mathrm{j}$ et $z_2 = 4 - \mathrm{j}$.
Écrire sous forme algébrique :

1. $z_1 + z_2$;
2. $2z_1$;
3. $z_1 \times z_2$.

Solution :

1. $z_1 + z_2 = (-2 + 3\mathrm{j}) + (4 - \mathrm{j}) = -2 + 4 + \mathrm{j}(3 - 1) = 2 + 2\mathrm{j}$;
2. $2z_1 = 2(-2 + 3\mathrm{j}) = -4 + 6\mathrm{j}$;
3. $z_1 \times z_2 = (-2 + 3\mathrm{j})(4 - \mathrm{j}) = -8 + 2\mathrm{j} + 12\mathrm{j} - 3\mathrm{j}^2 = -8 + 14\mathrm{j} - (-3) = -5 + 14\mathrm{j}$.

1.1. Forme algébrique

Définition 2 : Forme algébrique

L'écriture $x + \mathrm{j}y$ est appellée forme algébrique du complexe z.
x s'appelle la **partie réelle** et est noté $\mathrm{Re}(z)$.
y s'appelle la **partie imaginaire** et est notée $\mathrm{Im}(z)$. C'est un nombre réel.

Théorème 1 : Nombres complexes égaux

Puisque l'écriture d'une nombre complexe sous la forme $x+\mathrm{j}y$ est unique ; deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.

Définition 3 : Imaginaire pur

Soit $z = x + \mathrm{j}y$ un nombre complexe.
Si y est nul, on a un **nombre réel**.
Si x est nul et $y \neq 0$, on a un **imaginaire pur**.

Définition 4 : Complexe conjugué

Si $z = x + \mathrm{j}y$, on appelle **conjugué de** z le nombre $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$.

Théorème 2 : Propriétés sur les conjugués

Soit z un nombre complexe. On a

$$\overline{\overline{z}} = z \quad \text{et} \quad z \times \overline{z} = x^2 + y^2.$$

Remarque : Les nombres conjugués servent, entre autre, à rendre réel des dénominateurs afin d'obtenir des formes algébriques.

Exercice résolu 2 :

Mettre sous forme algébrique les nombres $z_3 = \dfrac{2}{3+\mathrm{j}}$ et $z_4 = \dfrac{1+2\mathrm{j}}{5-6\mathrm{j}}$.

Solution :

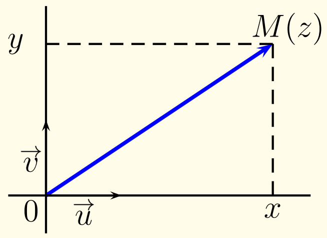
$z_3 = \dfrac{2}{3+\mathrm{j}} = \dfrac{2(3-\mathrm{j})}{(3+\mathrm{j})(3-\mathrm{j})} = \dfrac{6-2\mathrm{j}}{9-\mathrm{j}^2} = \dfrac{6-2\mathrm{j}}{10} = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}\mathrm{j}.$

$z_4 = \dfrac{1+2\mathrm{j}}{5-6\mathrm{j}} = \dfrac{(1+2\mathrm{j})(5+6\mathrm{j})}{(5-6\mathrm{j})(5+6\mathrm{j})} = \dfrac{5+6\mathrm{j}+10\mathrm{j}+12\mathrm{j}^2}{5^2-(6\mathrm{j})^2} = \dfrac{5+16\mathrm{j}-12}{25-36(-1)} = \dfrac{-7+16\mathrm{j}}{61}.$

1.2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{j}y$ on peut associer le point M de coordonnées $(x;y)$ et réciproquement.

$z = x + \mathrm{j}y \quad \Leftrightarrow$



Définition 5 : Image, affixe

Le point $M(x\ ;\ y)$ est **l'image** du nombre complexe $x + \mathrm{j}y$.
Le nombre $x + \mathrm{j}y$ est **l'affixe** du point M.
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est **le vecteur image** du nombre complexe $x + \mathrm{j}y$.

Remarque : Les réels ont leur image sur l'axe des abscisses, et les imaginaires purs ont leur image sur l'axe des ordonnées.

Théorème 3 : Complexes et géométrie

Si A a pour affixe z_A et B a pour affixe z_B alors :

- Le milieu I du segment $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
- $AB = |z_B - z_A|$
- $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = arg(z_B - z_A)$

1.3. Forme trigonométrique

Définition 6 : module

on appelle **module** de z le nombre réel $\sqrt{x^2+y^2}$. On le note $|z|$ ou r.
Il s'agit de la longueur du segment OM.

Définition 7 : argument

On appelle **argument** de z une mesure de l'angle entre $\overrightarrow{Ox}$ et $\overrightarrow{OM}$.
On le note souvent θ.

Remarques :

- la définition de l'argument d'un complexe nécessite que le plan soit orienté (il le sera implicitement à partir de maintenant).
- Un point étant donné, il existe plusieurs mesures de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$. Ainsi, on parle d'**un** argument et pas de **l'**argument.
- La notation algébrique correspond au repérage cartésien d'un point du plan,la notation trigonométrique correspond au repérage polaire. Suivant l'étude menée, chaque point de vue présente ses avantages.

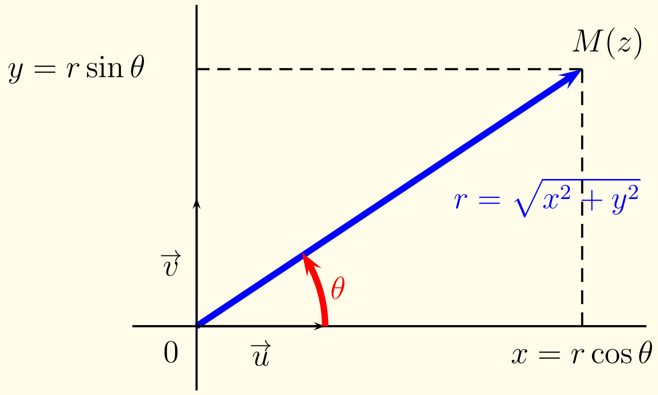
Méthode : passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique

Si l'on connait le module (noté r) et un argument (noté θ) d'un nombre complexe, on peut retrouver sa forme algébrique $x + \mathrm{j}y$. En considérant les projections orthogonales du point M sur les axes $(O, \vec{u})$ et $(O, \vec{v})$, on obtient les relations :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta.$$

On a alors

$$z = x + \mathrm{j}y = r\cos\theta + \mathrm{j}r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$$



Définition 8 : Forme trigonométrique

L'écriture $r(\cos\theta + j\sin\theta)$ est appelée **forme trigonométrique** du nombre complexe z.

Exercice résolu 3 :

Donner la forme algébrique du nombre complexe z_5 de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Solution : $z_5 = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = 2\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + \mathrm{j}\sin(\frac{\pi}{3})\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{j}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \mathrm{j}\sqrt{3}.$

Méthode : passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique

Supposons connue la forme algébrique $x + jy$ d'un nombre complexe.
En utilisant le théorème de pythagore, on obtient :

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Avec les formules trigonométrique, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \frac{x}{r} \\ \sin\theta & = & \frac{y}{r} \end{array} \right.$$

qui permet de déterminer avec les lignes trigonométriques une valeur d'un argument θ.

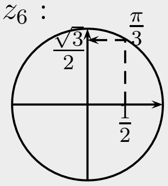
Exercice résolu 4 :

Donner la forme trigonométrique de $z_6 = 1 + j\sqrt{3}$.

Solution :

Calcul du module de z_6 : $|z_6| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{4} = 2$.
Calcul d'un argument de z_6 :

$$\left. \begin{array}{rcl} \cos\theta & = & \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta & = & \dfrac{y}{r} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right\}$$



donc $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (2π près).

z_6 a pour module $r = 2$ et pour argument $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

Théorème 4 : Égalité de deux nombres complexes

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument (à 2π près.)
Autrement dit, $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + j\sin\theta')$ sont égaux si et seulement si $r = r'$ et $\theta = \theta' + k2\pi$.

Théorème 5 : propriété des modules et des arguments

$$|zz'| = |z||z'| \qquad arg(zz') = arg(z) + arg(z')$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z')$$

Remarque : Pourquoi utiliser tantôt la forme algebrique, tantôt la forme trigonométrique ? On priviligiera la forme algébrique lorsque on s'interresse à une translation et que l'on veut additionner des nombres et à la forme trigonométrique lorsque l'on s'interresse à des rotations et que l'on veut multiplier ces nombres.

1.4. Forme exponentielle

Définition 9 :

On pose par définition :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

Les propriétés sur les modules et les arguments se traduisent dès lors :

Théorème 6 :

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

En généralisant la formule, on obtient :

Théorème 7 : Formule de Moivre

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + j\sin(n\theta)$$

Des relations $e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ et $e^{-i\theta} = \cos -\theta - j\sin\theta$, on déduit les formules d'Euler :

Théorème 8 : Formule d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Remarque : Les formules d'Euler et de Moivre sont à la base de la méthode permettant de linéariser $\cos^n\theta$ (ou $\sin^n\theta$).

Définition 10 :

Linéariser une expression trigonométrique, c'est trouver une expression du premier degré qui lui soit égale.

Exercice résolu 5 :

Linéariser $\cos^4\theta$.

Solution : A l'aide de la relation $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ et de la formule d'Euler, on écrit

$$\begin{aligned}
\cos^4\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{(e^{i\theta})^4+4(e^{i\theta})^3e^{-i\theta}+6(e^{i\theta})^2(e^{-i\theta})^2+4e^{i\theta}(e^{-i\theta})^3+(e^{-i\theta})^4}{16} \\
&= \frac{e^{i4\theta}+4e^{i2\theta}+6+4e^{-i2\theta}+e^{-i4\theta}}{16} \\
&= \frac{(e^{i4\theta}+e^{-i4\theta})+4(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta})+6}{16} \\
&= \frac{2\cos 4\theta+4\cos 2\theta+6}{16} \\
&= \frac{cos4\theta}{8} + \frac{cos2\theta}{2} + \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

2. Équations du second degré

2.1. Équations du second degré à coefficients réels

Théorème 9 : Équation du second degré

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont trois nombres réels.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, l'équation admet une solution double $-\dfrac{b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, l'équation n'admet pas de solution dans $\mathbf{R}$ mais admet deux solutions conjuguées dans $\mathbf{C}$: $\dfrac{-b \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

2.2. Racine carrée d'un nombre complexe

2.2.1 Recherche sous forme trigonométrique

Nous allons traiter un exemple qui sera plus parlant que la théorie.
On veut déterminer la racine carrée de $1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$ (c'est à dire résoudre l'équation $z^2 = 1 + \mathrm{j}\sqrt{3}$). On cherche z sous la forme $\rho e^{\mathrm{i}\theta}$.

$$z^2 = 1 + \mathrm{j}\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\rho e^{\mathrm{i}\theta}\right)^2 = \rho^2 e^{\mathrm{i}2\theta} = 2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$$

Comme deux nombres sont égaux si et seulement si leur module sont égaux et leur argument égaux à 2π près, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho^2 &=& 2 \\ 2\theta &=& \dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \rho &=& \sqrt{2} \\ \theta &=& \dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \rho &=& \sqrt{2} \\ \theta &=& \dfrac{\pi}{6} \text{ ou } \theta = \dfrac{7\pi}{6} \end{array}\right.$$

Ainsi, les racines carrées de $\sqrt{1 + \mathrm{j}\sqrt{3}}$ sont $\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2} + \mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\dfrac{\sqrt{6}}{2} - \mathrm{j}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Remarque :

- La méthode a l'avantage d'être la même si l'on veut résoudre une équation du type $z^3 = \alpha$, $z^8 = \alpha$, ...
- La méthode a un gros inconvenient : Il n'est pas toujours possible de trouver la valeur exacte d'un argument d'un nombre complexe. Par suite, on n'obtiendra pas de valeur exacte pour la racine carrée. La méthode ci-dessous est plus longue mais plus exacte.

2.2.2 Recherche sous forme algébrique

Traitons un autre exemple.
On veut déterminer la (les) racine(s) carrée(s) de $4 + 3\mathrm{j}$. On cherche les solutions sous la forme $x + \mathrm{j}y$.

$$z^2 = (x + \mathrm{j}y)^2 = 4 + 3\mathrm{j} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + \mathrm{j}2xy = 4 + 3\mathrm{j}$$

Deux nombres complexes étant égaux si et seulement si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - y^2 &=& 4 \\ 2xy &=& 3 \end{array}\right.$$

On peut résoudre ce système en exprimant x en fonction de y ($x = \dfrac{3}{2y}$) que l'on reporte dans le première ligne qui devient une équation bi-carrée (type $ax^4 + bx^2 + c = 0$) que l'on résout par un changement de variable pour obtenir une équation du second degré.

Une astuce consiste à utiliser un autre renseignement :

$$\left\{\begin{array}{lcl} |z^2| & = & |4+3\mathrm{j}| = \sqrt{4^2+3^2} = 5 \\ |z^2| & = & |z|^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = x^2+y^2 \end{array}\right.$$

On conclut que $x^2 + y^2 = 5$. On peut remplacer le système précédent par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2 & = & 5 \\ x^2-y^2 & = & 4 \end{array}\right.$$

Par addition (et soustraction) des lignes, on obtient $x^2 = 9/2$ et $y^2 = 1/2$, donc $x = \pm 3\sqrt{2}/2$ et $y = \pm\sqrt{2}/2$. Or $2xy = 3$, donc x et y sont de même signe.
Les solutions sont donc $\frac{\sqrt{2}}{2}(3+\mathrm{j})$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}(3+\mathrm{j})$.

2.3. Équations du second degré à coefficients complexes

Nous savons déjà résoudre les équations du second degré pour lesquelle les coefficients sont des nombres réels (par exemple : $2x^2 + 3x + 9 = 0$). On s'interresse désormais à la résolution des équations du second degré pour lesquelles les coefficients sont des nombres complexes (par exemple $z^2 - (3+2i)z + 1 + 3i = 0$).
Les régles connues pour les coefficients réels s'étendent au cas complexe.

Théorème 10 :

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b et c nombres complexes admet toujours deux solutions dans $\mathbf{C}$:

$$x = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } x = \frac{-b-\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Remarque : Toute la difficulté est de déterminer la racine carrée de Δ.

Preuve. $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{(2a)^2}$.

En notant δ le nombre tel que $\delta^2 = b^2 - 4ac$, on obtient $x + \dfrac{b}{2a} = \pm\dfrac{\delta}{2a}$ d'où

$$x = -\frac{b \pm \delta}{2a}$$

□

Exercice résolu 6 :

Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $(1-\mathrm{j})z^2-(5-\mathrm{j})z+4+2\mathrm{j}=0$

Solution : C'est une équation du second degré avec $a=1-\mathrm{j}$, $b=-(5-\mathrm{j})$ et $c=4+2\mathrm{j}$.

1. On calcule le discriminant de cette équation :
$\Delta=b^2-4ac=(-(5-\mathrm{j}))^2-4(1-\mathrm{j})(4+2\mathrm{j})=25-10\mathrm{j}+\mathrm{j}^2-4(4+2\mathrm{j}-4\mathrm{j}-2\mathrm{j}^2)=24-10\mathrm{j}-4(6-2\mathrm{j})=-2\mathrm{j}$

2. On cherche la racine de $-2\mathrm{j}$ sous forme algébrique.
$z^2=-2\mathrm{j}\Leftrightarrow(x+\mathrm{j}y)^2=-2\mathrm{j}\Leftrightarrow x^2-y^2+\mathrm{j}2xy=-2j$
Par unicité de la forme algébrique, on obtient : $\left\{\begin{array}{rcl}x^2-y^2&=&0\\2xy&=&-2\end{array}\right.$
On utilise le module de $-2\mathrm{j}$ pour résoudre plus facilement le système :
$\left\{\begin{array}{rcl}|z^2|&=&|-2\mathrm{j}|=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2\\|z^2|&=&|z|^2=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=x^2+y^2\end{array}\right.$

On conclut que $x^2+y^2=2$. On peut remplacer le système précédent par le système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rcl}x^2+y^2&=&2\\x^2-y^2&=&0\end{array}\right.$$
Par addition (et soustraction) des lignes, on obtient $x^2=2/2$ et $y^2=2/2$, donc $x=\pm1$ et $y=\pm1$. Or $2xy=-2$, donc x et y sont de signe contraire.
Les racines de Δ sont donc $\delta_1=1-\mathrm{j}$ et $\delta_2=-1+\mathrm{j}$.

3. On calcule les solutions :
$x_1=\dfrac{-b+\delta_1}{2a}=\dfrac{(5-\mathrm{j})+(1-\mathrm{j})}{2(1-\mathrm{j})}=\dfrac{(6-2\mathrm{j})(1+\mathrm{j})}{2(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j})}=\dfrac{8+4\mathrm{j}}{4}=2+\mathrm{j}$
$x_2=\dfrac{-b+\delta_1}{2a}=\dfrac{(5-\mathrm{j})-(1-\mathrm{j})}{2(1-\mathrm{j})}=\dfrac{4(1+\mathrm{j})}{2(1-\mathrm{j})(1+\mathrm{j})}=\dfrac{4+4\mathrm{j}}{4}=1+\mathrm{j}$
$x_3=\dfrac{-b+\delta_2}{2a}=\dfrac{(5-\mathrm{j})+(-1+\mathrm{j})}{2(1-\mathrm{j})}=x_2$
$x_4=\dfrac{-b+\delta_2}{2a}=\dfrac{(5-\mathrm{j})-(-1+\mathrm{j})}{2(1-\mathrm{j})}=x_1$
Les calculs avec δ_2 donnent les mêmes solutions que les calculs fait avec $delta_1$, c'est pourquoi, dans la pratique, on ne les fait pas.
les solutions sont $x_1=2+\mathrm{j}$ et $x_2=1+\mathrm{j}$.

3. Lignes de niveau

Définition 11 :

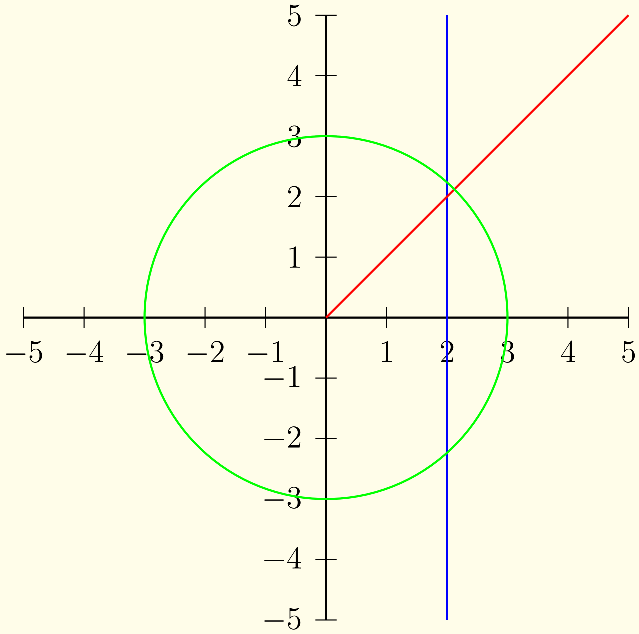
Dans un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$, la **ligne de niveau** k d'une fonction f est l'ensemble des points d'abscisse x (ou d'affixe z) tels que $f(x)=k$ (ou $f(z)=k$)

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x)=x^2$.
La ligne de niveau 1 de la fonction f est $\{-1;1\}$.
La ligne de niveau -1 de la fonction f est vide.

Théorème 11 : Les principales lignes de niveau sont :

1. Ligne de niveau de la fonction $f : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.
   $f(z) = k \Leftrightarrow f(a + jb) = a = k$
   La ligne de niveau k de la fonction $\mathbf{Re}(z)$ est la droite d'équation $x = k$
2. Ligne de niveau de la fonction $f : z \mapsto |z|$.
   $|z| = k \Leftrightarrow OM = k$
   La ligne de niveau k de la fonction $|z|$ est le cercle de centre O et de rayon k.
   (d'où la necessité d'avoir $k > 0$, sinon la ligne de niveau est vide)
3. Ligne de niveau de la fonction $f : z \mapsto \arg(z)$.
   $\arg(z) = k \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = k$
   La ligne de niveau k de la fonction $\arg(z)$est la demi-droite d'origine O exclu et d'angle polaire k.

Exemple :



En bleu, la ligne de niveau 2 de la fonction $\mathrm{Re}(z)$.
En rouge, la ligne de niveau $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $\arg(z)$.
En vert, la ligne de niveau 3 de la fonction $|z|$.

4. Complexes et transformations géométriques

Les fonctions sont un procédé qui a un nombre fait correspondre un autre nombre. Dans le cas des fonctions qui à un complexe associe un autre complexe (exemple : $f : z \mapsto z^2$), on obtient aussi, en utilisant la représentation géométrique des complexes, une opération qui à un point du plan associe un autre point. Nous allons voir dans cette section, les transformations décrite par certaines fonctions types.

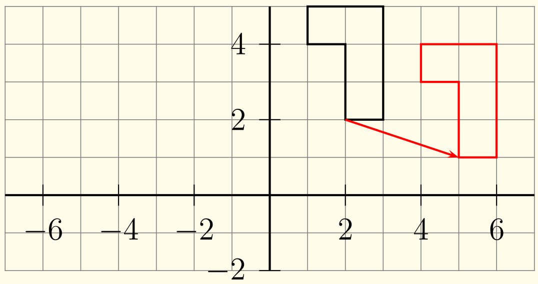
4.1. Transformations associées à $f : z \mapsto z + \alpha, \alpha \in \mathbb{C}$

Théorème 12 :

La tranformation géométrique associée à $f : z \mapsto z + \alpha$ (α est un complexe) est la translation de vecteur d'affixe α.

Preuve. Soit M' le point d'affixe $z' = f(z)$.
$z' = z + \alpha \Rightarrow z' - z = \alpha \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur fixe d'affixe α. □

Exemple : $f : z \mapsto z + (3 - i)$



Par f, l'image de la figure noire est la figure rouge. Pour l'obtenir, on peut :
- soit calculer les images de chacun des points de la figure (l'image de A d'affixe $z = 2+2i$ est $f(2 + 2i) = 2 + 2i + 3 - i = 5 + i$, ... ;
- soit effectuer la translation de vecteur $(3; -1)$(ce qui est plus rapide).

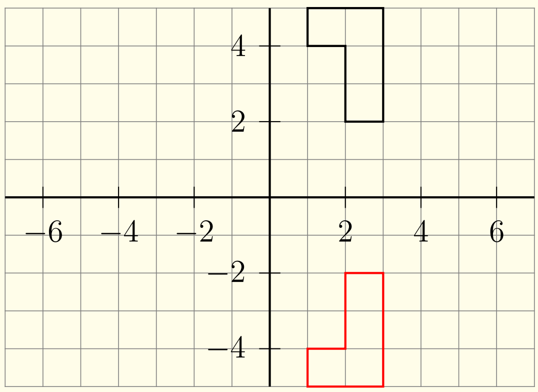
4.2. Transformations associées à $f : z \mapsto \overline{z}$

Théorème 13 :

La tranformation géométrique associée à $f : z \mapsto \overline{z}$ est la symétrie d'axe $(O; \vec{u})$.

Preuve. Soit M' le point d'affixe $z' = f(z)$.
si M a pour affixe $a + jb$, alors M' a pour affixe $a - jb$. □

Exemple : $f : z \mapsto \overline{z}$



Par f, l'image de la figure noire est la figure rouge. Pour l'obtenir, on a effectué la symétrie d'axe $(O, \vec{u})$

4.3. Transformations associées à $f : z \mapsto az$, $a \in \mathbb{C}$

Théorème 14 :

La tranformation géométrique associée à $f : z \mapsto az$ est la composée d'une rotation de centre 0, d'angle $\arg(a)$ et d'un agrandissement de centre O de rapport $|a|$.

Preuve. Soit M' le point d'affixe $z' = f(z)$.

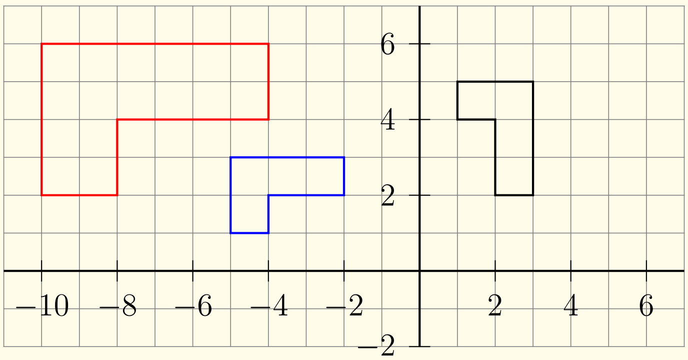
$$z' = az \Leftrightarrow \begin{cases} |z'| &= |a||z| \\ \arg(z') &= \arg(z) + \arg(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OM' &= |a|OM \\ (\vec{u};\overrightarrow{OM'}) &= (\vec{u};\overrightarrow{OM}) + \arg(a) \end{cases} \qquad \square$$

Définition 12 :

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto az$ est appellée **similitude de centre O, d'angle** $\arg(a)$ **et de rapport** $|a|$.

Remarque : dans le cas où le rapport est de 1, il s'agit simplement d'une rotation.

Exemple : $f : z \mapsto 2e^{i\frac{\pi}{2}}z$



Par f, l'image de la figure noire est la figure rouge. Pour l'obtenir, on peut :
- soit calculer les images de chacun des points de la figure (l'image de A d'affixe $z = 2+2i$ est $f(2+2i) = (2+2i)(2e^{i\frac{\pi}{2}}) = (2+2i)(2i) = -4+4i, \ldots$;
- soit effectuer la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivie de l'homothétie de rapport 2 et de centre O (ce qui est plus rapide).

4.4. Transformations associées à $f : z \mapsto \frac{1}{z}$

Définition 13 :

La transformation géométrique associée à $f : z \mapsto \frac{1}{z}$ est appellée **inversion complexe**.

Remarque : Le point O n'a pas d'image par cette transformation.

Théorème 15 : image d'une droite

L'image d'une droite qui ne passe pas par O est un cercle qui passe par O mais privé de O.

Preuve. On peut faire une démonstration dans le cas général, mais on se bornera à l'étude d'un exemple. (Il suffit de remplacer les valeurs données par des lettres pour avoir le cas général).
Soit M' le point d'affixe $z' = f(z)$ et $(\mathscr{D})$ la droite d'équation $2x + 4y + 1 = 0$.
Cherchons d'abord le lien entre les coordonnées de M et celle de $M' = f(z)$.

$$\begin{aligned} M' = f(M) &\Leftrightarrow z' = \frac{1}{z} \text{ et } z \neq 0 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{z'} \text{ et } z' \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x + iy = \frac{1}{x' + iy'} = \frac{x' - iy'}{x'^2 + y'^2} \text{ et } (x'; y') \neq (0; 0) \\ &\Leftrightarrow \text{par identification} \begin{cases} x &= \dfrac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y &= \dfrac{-y'}{x'^2 + y'^2} \\ (x'; y') &\neq (0; 0) \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part, si M est sur la droite $(\mathscr{D})$, ses coordonnées vérifient $2x + 4y + 1 = 0$.
En utilisant dans l'équation de la droite, les expressions de x et y obtenue dans le système, on obtient :

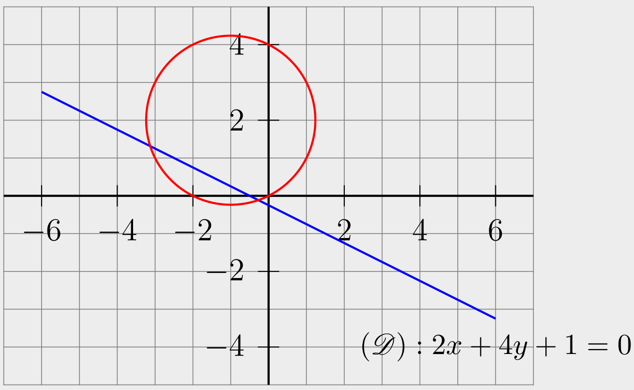
$$2\left(\frac{x'}{x'^2 + y'^2}\right) - 4\left(\frac{y'}{x'^2 + y'^2}\right) + 1 = 0 \text{ d'où } 2x' - 4y' + (x'^2 + y'^2) = 0.$$

Cette équation s'écrit encore $(x' + 1)^2 + (y' - 2)^2 = 5$ ou encore $AM'^2 = 5$ (soit $AM = \sqrt{5}$) donc M' est sur le cercle de centre $A(-1; 2)$ et de rayon $\sqrt{5}$. □

Illustration :

$$f : z \mapsto \frac{1}{z}$$

L'image de la droite par f est le cercle bleu. (On peut calculer l'image par f de point situé sur la droite).



Remarque : En utilisant le même raisonnement et en utilisant des valeurs littérales, on montre que l'image de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ est le cercle privé du point O de centre $(-\frac{a}{2c}; \frac{b}{2c})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|c|}$.

Théorème 16 : image d'un cercle

L'image d'un cercle passant par O et privé de O est une droite.

Preuve. $f(f(z)) = z$ donc l'image de l'image d'un point M est ce même point.
Par conséquent, l'image de l'image d'une droite est elle-même d'où l'image d'un cercle est une droite. □

Remarque : L'image d'un cercle ne passant pas par O est un cercle. Cette propriété n'est pas au programme.

4.5. Compositions de transformations élémentaires

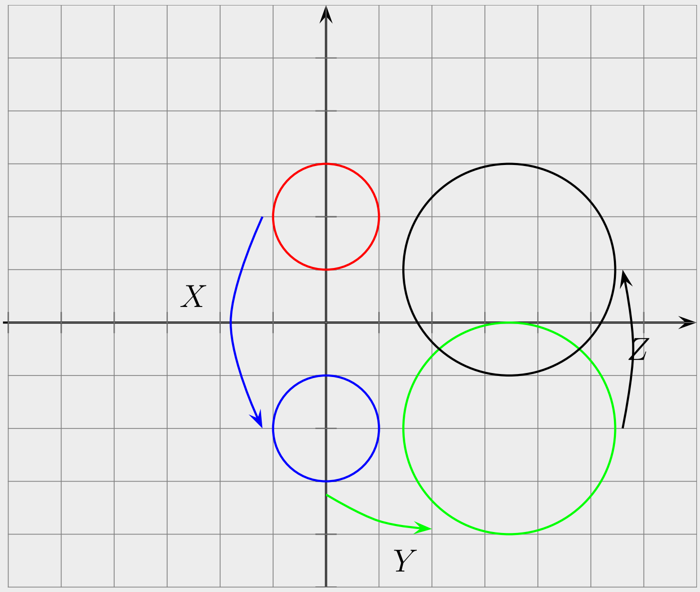
Exercice résolu 7 :

Soit s la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = (1+\sqrt{3}\mathrm{j})\overline{z} + 3\mathrm{j}$.

1. Décomposer s en une succession de transformations élémentaires.
2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω d'affixe $2\mathrm{j}$ et de rayon 1.
   Dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$, construire l'image de ce cercle par la transformation f.
   (On ne demande aucun calcul).

Solution :

1. On a $s : z \xrightarrow{X} \overline{z} \xrightarrow{Y} (1+\sqrt{3}\mathrm{j})\overline{z} \xrightarrow{Z} (1+\sqrt{3}\mathrm{j})\overline{z} + 3\mathrm{j}$
   où X est la fonction $z \mapsto \overline{z}$ (symétrie d'axe (Ox)) ;
   $Y : z \mapsto (1+\sqrt{3}\mathrm{j})z$ (similitude de rapport $|1+\sqrt{3}\mathrm{j}| = 2$ et d'angle $\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{j}) = \dfrac{\pi}{3}$) ;
   $Z : z \mapsto z + 3\mathrm{j}$ (translation de vecteur 3j).
2. On effectue les différentes transformations sur le cercle de centre $(0;2)$ et de rayon 1.

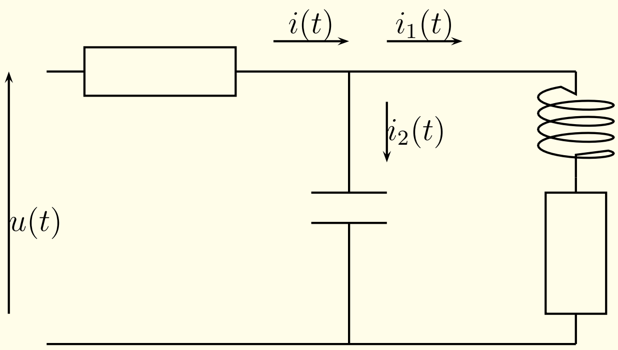


L'image du cercle rouge initial est le cercle noir.

5. Nombres complexes en électricité

5.1. Introduction de la notation

On considère le circuit électrique :



Lorsque l'on étudie un circuit en régime sinusoïdal de pulsation ω, les grandeurs électriques s'écrivent :

$$u(t) = U\sqrt{2}\sin\omega t$$
$$i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)$$
$$i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_1)$$
$$i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi_2)$$

On voit que les termes qui changent d'une grandeur à l'autre sont la valeur efficace (U, I, I_1, I_2) et le déphasage $(\varphi, \varphi_1, \varphi_2)$. Seuls ces termes sont donc intérréssants, les autres ne changeant pas.

Remarque : EDF distribue des tensions électriques sinusoïdales de fréquence $f = 50$Hertz. La pulsation est $\omega = 2\pi f \approx 314$ rad.s^{-1} : c'est la même constante pour toutes les fonctions i et u ainsi définies.

D'où l'idée de représenter, dans un premier temps, les grandeurs électriques par des vecteurs, dont la longueur est proportionnelle à la valeur efficace, et en faisant avec un axe de réference un angle égal au déphasage (c'est la méthode de Fresnel).

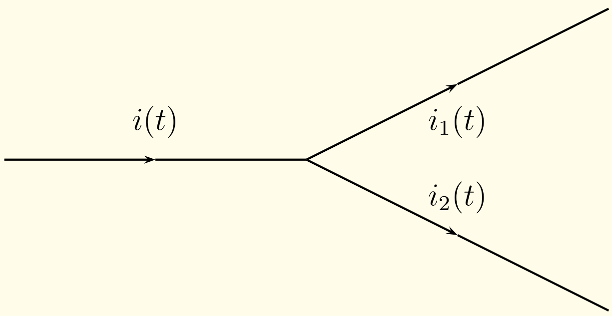
L'inconvénient de cette méthode est que l'on ne dispose pas sur les vecteurs de toutes les opérations intervenant dans les calculs en électricité (notamment inverse d'un vecteur). Les grandeurs (intensité ou tension) étant de la forme $a(t) = A\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, on leur associe le nombre complexe, noté $\underline{A}$, de module A (valeur maximale ou efficace) et d'argument φ (déphasage à l'origine des temps en radian.)

Définition 14 : Notation complexe d'une grandeur physique

A toute tension (intensité) sinusoïdale u (i), on associe le nombre complexe, noté $\underline{U}$ ($\underline{I}$)
- de module U, la valeur efficace de u,
- d'argument φ, la phase initiale de u.

5.2. Intêret de la notation : Addition de grandeur sinusoïdale

Nous venons d'introduire une notation. Une question est alors légitime : A quoi cela nous sert-il ?
Pour répondre à cette question, on considère un premier exemple concret avec la situation ci-dessous :



Loi des noeuds

Connaissant $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_1)$ et $i_2(t) = I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_2)$, on cherche à connaître $i(t)$, c'est à dire on cherche la valeur efficace I et la valeur du déphasage φ.
La loi des noeuds nous dit que $i(t) = i_1(t)+i_2(t) = I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_1)+I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_2)$.
Il faut alors plusieurs lignes de calculs (voir la démonstration du théorème) pour arriver à transformer l'écriture ci-dessus en celle voulue. L'utilisation des complexes évite ces difficultés (voir exemple).

Théorème 17 :

Dans le cas de signaux de même pulsation, on a

$$\underline{I_0} = \underline{I_1} + \underline{I_2}$$
$$\underline{U_0} = \underline{U_1} + \underline{U_2}$$

Preuve. La loi des noueds nous dit que, à chaque instant t, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.
En utilisant la relation $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$, on montre que :

$$\begin{aligned} i_1(t) + i_2(t) &= I_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_1) + I_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_2) \\ &= \left[I_1\sqrt{2}\sin(\omega t)\cos\varphi_1 + I_1\sqrt{2}\sin\varphi_1\cos(\omega t)\right] + \left[I_2\sqrt{2}\sin(\omega t)\cos\varphi_2 + I_2\sqrt{2}\sin\varphi_2\cos(\omega t)\right] \\ &= \left(I_1\sqrt{2}\cos\varphi_1 + I_2\sqrt{2}\cos\varphi_2\right)\sin(\omega t) + \left(I_1\sqrt{2}\sin\varphi_1 + I_2\sqrt{2}\sin\varphi_2\right)\cos(\omega t). \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} i(t) &= I\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi) \\ &= \left(I\sqrt{2}\cos\varphi\right)\sin(\omega t) + \left(I\sqrt{2}\sin\varphi\right)\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Puisque la relation $i(t) = i_1(t)+i_2(t)$ est vraie à chaque instant, elle est donc vraie en particulier au temps $t = 0$, d'où $\sqrt{2}\,I\sin\varphi = \sqrt{2}\,I_1\sin\varphi_1 + \sqrt{2}\,I_2\sin\varphi_2$ (car on a alors $\sin(\omega t) = 0$ et $\cos(\omega t) = 1$). La relation est aussi vraie en $t = \frac{\pi}{2}$. On obtient $\sqrt{2}\,I\cos\varphi = \sqrt{2}\,I_1\cos\varphi_1 +$

$\sqrt{2}\, I_2 \cos\varphi_2$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned}
\underline{I} &= \sqrt{2}\, I\,(\cos\varphi + \mathrm{j}\sin\varphi) \\
&= \sqrt{2}\, I\cos\varphi + \mathrm{j}\sqrt{2}\, I\sin\varphi \\
&= \sqrt{2}\, I_1\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\, I_2\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sqrt{2}\, I_1\sin\varphi_1 + \mathrm{j}\sqrt{2}\, I_2\sin\varphi_2 \\
&= \sqrt{2}\, I_1\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{j}\sin\varphi_1) + \sqrt{2}\, I_2\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{j}\sin\varphi_2) \\
&= \underline{I_1} + \underline{I_2}
\end{aligned}$$

□

Exemple : Considérons $i_1 = 2\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $i_2 = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$.
On détermine la forme algébrique de $\underline{I_1}$ et $\underline{I_2}$ pour additionner ces nombres plus facilement.
On obtient :
$\underline{I_1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{j}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\,(1+\mathrm{j})$
$\underline{I_2} = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{j}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{3}{2}\left(\sqrt{3} - \mathrm{j}\right)$.
Nous en déduisons que $\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = \left(\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \mathrm{j}\left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right)$.
Comme on ne reconnais pas de lignes trigonométriques connues, on utilise des valeurs approchées. $\underline{I} \approx 4,012289774 - 0,08578643763\mathrm{j}$
Nous en déduisons que l'intensité efficace vaut environ $|\underline{I}| \approx 4,01$ Ampères et une mesure de son argument $-0,021$ radians, et donc $i(t) \approx 4,01\sqrt{2}\sin(\omega t - 0,021)$

5.3. Impédance complexe

Définition 15 : impédance

L'impédance complexe du circuit est le nombre complexe $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$.
L'impédance du circuit est le module de l'impédance complexe noté $|\underline{Z}|$

Théorème 18 :

En courant sinusoïdal, dans un circuit en série ou en parrallèle, la loi d'association des impédances est la même que celle des résistances, en courant continu, dans le même type de circuit.

Théorème 19 :

L'impédance complexe d'un circuit contenant une résistance est $\underline{Z} = R$.
L'impédance complexe d'un circuit contenant une bobine parfaite est $\underline{Z} = \mathrm{j}L\omega$.
L'impédance complexe d'un circuit contenant un condensateur parfait est $\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} = -\frac{1}{C\omega}\mathrm{j}$.

Preuve. On ne fera que le cas de la bobine parfaite, les autres cas étant similaire.
Par définition de l'intensité $i(t)$, on a $u(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$. Comme $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$, on obtient

$$\begin{aligned}
u(t) &= L\frac{d(I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi))}{\mathrm{d}t} \\
&= LI\sqrt{2}\omega\cos(\omega t + \varphi) \\
&= L\omega I\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{car} \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)
\end{aligned}$$

Donc $\underline{U} = \left[IL\omega, \varphi + \frac{\pi}{2}\right]$ et par suite, $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\left[IL\omega, \varphi + \frac{\pi}{2}\right]}{[I, \varphi]} = \left[L\omega, \frac{\pi}{2}\right] = \mathrm{j}L\omega$.
On montre de même que l'impédance complexe d'un condensateur parfait de capacité C vaut $\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}$ (par définition $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$) □

6. Exercices

Révisions

2.1 On donne $z_1 = -2 + 3\mathrm{j}$ et $z_2 = 4 - \mathrm{j}$. Écrire sous forme algébrique :

1. $z_1 + z_2$
2. $2z_1 - 3z_2$
3. $z_1 \times z_2$
4. $z_1 \times \overline{z_1}$
5. z_1^2
6. $\dfrac{z_1}{z_2}$
7. $\dfrac{3}{z_1 + z_2}$
8. $\dfrac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$

2.2 Écrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \dfrac{5 + \mathrm{j}}{3\mathrm{j}}$
2. $z_2 = \dfrac{2}{7 - \mathrm{j}}$
3. $z_3 = \dfrac{1 + 2\mathrm{j}}{(2 + \mathrm{j}) - 5}$
4. $z_4 = \dfrac{3 + \mathrm{j}}{(4 + 2\mathrm{j}) + (5 - \mathrm{j})}$
5. $z_5 = \dfrac{3\mathrm{j}}{2 - 5\mathrm{j}}$
6. $z_6 = 3 + \mathrm{j} - \dfrac{1}{1 + 2\mathrm{j}}$
7. $z_7 = 1 - 3\mathrm{j} + \dfrac{2 + \mathrm{j}}{3\mathrm{j}}$
8. $z_8 = \dfrac{5j}{(2 - \mathrm{j}) - (2 - 5\mathrm{j})^2}$
9. $z_9 = \dfrac{5\mathrm{j}}{(2 - \mathrm{j})(3 - 2\mathrm{j})}$

2.3 Écrire en fonction de x et y la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{5}{x + \mathrm{j}y}$
2. $\dfrac{2 - 3\mathrm{j}}{x + 4\mathrm{j}}$
3. $\dfrac{1 + \mathrm{j}}{2 + x + \mathrm{j}y}$
4. $\dfrac{5 + \mathrm{j}}{(1 - 3\mathrm{j}) - (x + \mathrm{j}y)}$

2.4 Résoudre chacune des équations suivantes.

1. $\mathrm{j}z + 2 - \mathrm{j} = 0$;
2. $\mathrm{j}\overline{z} = 1 - \mathrm{j}$;
3. $(3 + 5\mathrm{j})z = 1 - z$;
4. $\dfrac{1}{z + \mathrm{j}} = 3 + \mathrm{j}$;
5. $\dfrac{z + 1}{z - 1} = 2\mathrm{j}$;
6. $(\mathrm{j}z + 1)(\overline{z} + 3\mathrm{j}) = 0$;
7. $(7 - \mathrm{j})\overline{z} + 3 = 0$;
8. $\left\{\begin{array}{rcl} z - z' & = & \mathrm{j} \\ \mathrm{j}z + z' & = & 1 \end{array}\right.$;
9. $\left\{\begin{array}{rcl} 2z + z' & = & 1 - \mathrm{j} \\ z - \mathrm{j}z' & = & 0 \end{array}\right.$.

2.5 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté au repére orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.
Soit $P(z) = z^3 - 8z - 32$, où z est un nombre complexe.

1. **a.** Calculer $P(4)$.
   b. Déterminer les réels $a,\ b,\ c$ tels que : $P(z) = (z - 4)\left(az^2 + bz + c\right)$.
   c. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = -2 - 2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = -2 + 2\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{C}} = 2e^{\frac{i\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{D}} = z_{\mathrm{B}} \times z_{\mathrm{C}}.$$

où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

2. Déterminer la forme algébrique de z_{C} puis celle de z_{D}.
3. a. Calculer le module et un argument de z_{B}.
   b. En déduire le module et un argument de z_{D}.
4. Déduire des questions **2.** et **3.b.** les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.

2.6

1. Mettre sous forme algébrique puis placer dans un repère chacun des nombres suivants :
   a. $z_1 = [4\ ;\ \frac{\pi}{4}]$;
   b. z_2 de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$;
   c. $z_3 = [1\ ;\ \frac{4\pi}{3}]$.
2. Mettre sous forme trignométrique chacun des nombres suivants :

   a. $z_4 = 2 - 2\mathrm{i}$; b. $z_5 = 2\sqrt{3} + 2\mathrm{i}$; c. $z_6 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$.

2.7 On considère les deux nombres complexes suivants : $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - \mathrm{i}$.

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. En déduire le module et un argument des nombres complexes :

$$\overline{z_1} \quad ; \quad \frac{1}{z_1} \quad ; \quad (z_1 \times z_2) \quad ; \quad \frac{z_1}{z_2} \quad ; \quad z_2^8$$

2.8 On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** des nombres complexes l'équation

$$\left(z^2 + 9\right)\left(z^2 - 9z + 27\right) = 0.$$

2. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3\mathrm{i} \quad ; \quad z_{\mathrm{B}} = \frac{9}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i} \quad \text{et } z_{\mathrm{C}} = \frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

   a. Écrire chacun des nombres complexes $z_{\mathrm{A}}, z_{\mathrm{B}}$ et z_{C} sous la forme $re^{\mathrm{i}\theta}$ où r est un nombre, réel positif et θ un nombre réel.
   b. Soit I le point d'affixe $z_{\mathrm{I}} = 2$. Calculer les distances AI, BI et CI.
   En déduire que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

c. À l'aide d'une règle et d'un compas, construire les points I, A, B et C. On utilisera une feuille de papier millimétré et on laissera apparents les traits de construction pour les points B et C.

2.9 On note i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. **a.** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbf{C}$ l'équation d'inconnue z :
$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$
On désigne par z_1 la solution de partie imaginaire positive et par z_2 l'autre solution.
   b. Déterminer le module et un argument de chacune des solutions.
   c. En déduire le module et un argument de z_1^2 et de z_2^2 ; calculer ces deux nombres sous forme algébrique.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On désigne par A, B, A′ et B′ les points d'affixes respectives :
$$z_A = 1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z_B = 1 - i\sqrt{3} \quad ; \quad z_{A'} = -2 + 2i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{B'} = -2 - 2i\sqrt{3}.$$
   a. Placer ces points de façon précise dans le plan complexe.
   b. Justifier que AA′B′B est un trapèze isocèle.
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Calculer l'affixe des images de chacun des points B et A′ par la rotation R.
Que remarque-t-on ?

2.10 Linéariser chacune des expressions suivantes :

1. $\cos^3 x$
2. $\cos 2x \sin 3x$
3. $\sin^4 x$
4. $\cos x \sin^2 x$
5. $\cos^4 x$
6. $\cos 5x \cos 7x$

Déduire une primitive de chacune des expressions données.

2.11 Le but de cet exercice est la résolution dans l'intervalle $[0{,}2\pi]$ de l'équation $2\sin x - \sin 3x = 0$.

1. Linéariser $\sin^3 x$ et en déduire que : $4\sin^3 x - \sin x = 2\sin x - \sin 3x$
2. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ les équations suivantes :
   a. $\sin x = 0$ **b.** $\sin x = \frac{1}{2}$ **c.** $\sin x = -\frac{1}{2}$
3. En déduire les solutions appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ de l'équation $2\sin x - \sin 3x = 0$.

Équations du second degré

2.12 En utilisant la méthode donnée dans le cours, déterminer la racine carrée de chacun des nombres suivants :
$$20 + 48j; \qquad 3 + 4j; \qquad -3 + 4j; \qquad -16 + 30j; \qquad j$$

2.13 En utilisant la formule donnée en cours, et les résultats de l'exercice précédent, résoudre dans $\mathbf{C}$, chacune des équations suivantes :

1. $z^2 + (2 - \mathrm{j})z - 2\mathrm{j} = 0$
2. $z^2 + 2z + 1 - \mathrm{j} = 0$
3. $z^2 - (3 + 2\mathrm{j})z + (1 + 3\mathrm{j}) = 0$
4. $z^2 + 2(1 + \mathrm{j})z - 5(1 + 2\mathrm{j}) = 0$
5. $z^4 + (1 - 2\mathrm{j})z^2 - 2\mathrm{j} = 0$ (poser $X = z^2$)

2.14 Équation bicarrée.

1. Résoudre dans l'ensemble **C** l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions sous forme trigonométrique.
3. Déduire des questions précédentes les solutions de l'équation $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

2.15 *Equations du second degré dépendant d'un paramètre.*
Soit k un nombre réel. On considère l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2(1 + \mathrm{j}k^2)z + 1 - k^4 = 0$$

Le but de ce devoir maison est de trouver les solutions, dans **C**, de cette équation en fonction de la valeur de k.

1. *Cas où* $k = 0$.
   - a. Réecrire l'équation donnée en remplaçant k par 0.
   - b. Résoudre alors l'équation.
2. *Cas où* $k = 2$.
   - a. Réecrire l'équation donnée en remplaçant k par sa valeur.
   - b. Résoudre alors l'équation.
3. *Cas général.*
   - a. Montrer que le déterminant de l'équation vaut $\Delta = 8k^2\mathrm{j}$.
   - b. Calculer, en fonction de k, la racine carrée de Δ.
   - c. En déduire l'ezpression des solutions en fonction de k.
   - d. Remplacer k par 0 puis par 2. que retrouve-t-on ?
   - e. Donner les solutions de l'équation $z^2 + (-2 - 18\mathrm{j})z - 80 = 0$.

Ligne de niveau

2.16 En s'inspirant de ce qui a été fait en cours :

1. Donner la ligne de niveau 3 pour la fonction $f : z \mapsto \mathrm{Re}(z)$.
2. Donner la ligne de niveau 4 pour la fonction $f : z \mapsto |z|$.
3. Donner la ligne de niveau 0 pour la fonction $f : z \mapsto \arg(z)$.
4. Donner la ligne de niveau -5 pour la fonction $f : z \mapsto |z|$.
5. Donner la ligne de niveau 0 pour la fonction $f : z \mapsto |z|$.
6. Donner la ligne de niveau 3 pour la fonction $f : z \mapsto \mathrm{Im}(z)$.

2.17 On considère la fonction $f : z \mapsto |z - (3 + 4\mathrm{j})|$.

1. Interpréter géométriquement le nombre $|z - (3 + 4\mathrm{j})|$.
2. En déduire la ligne de niveau 3 de f.

2.18 On considère la fonction $f : z \mapsto \arg(z - (3 + 4\mathrm{j}))$.

1. Interpréter géométriquement le nombre $\arg(z - (3 + 4\mathrm{j}))$.
2. En déduire la ligne de niveau $\dfrac{\pi}{2}$ de f.

2.19 Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, déterminer et représenter l'ensemble des images des nombres complexes z tels que :

1. $|z| = 1$
2. $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$
3. $\mathrm{Im}(z) = 2$
4. $|z-3| = 2$
5. $\mathrm{Re}(z-1+\mathrm{j}) = 2$
6. $\mathrm{Im}(z-\mathrm{j}) = 3$.

2.20 Décrire sous forme d'une ligne de niveau :

1. la droite d'équation $y = 5$;
2. la demi-droite (Ox) ;
3. le cercle de centre $(4;5)$ et de rayon 2 ;
4. la demi-droite d'origine $1-\mathrm{j}$ et d'angle polaire $\frac{\pi}{3}$.

2.21 On considère la transformation f qui à tout nombre complexe, z fait correspondre le nombre $f(z) = \mathrm{j}z+\mathrm{j}+2$.

1. Calculer $f(\mathrm{j})$; $f(1)$; $f(2+3\mathrm{j})$.
2. On pose $z = x+\mathrm{j}y$.
   a. Ecrire sous forme algébrique $f(z)$.
   b. Déterminer x et y pour que $f(z) = 0$.
   c. Quelle condition doit-on avoir sur x pour que $f(z)$ soit un nombre réel ?
   d. Quelle condition doit-on avoir sur x et y pour que $f(z)$ soit un nombre imaginaire pur ?
3. Déduire des questions précédentes la ligne de niveau 0 de $\mathrm{Im}(f(z))$ puis celle de $\mathrm{Re}(f(z))$.

2.22 On considère la transformation f qui a tout nombre complexe z différent de 3 fait correspondre le nombre $f(z) = \dfrac{2+\mathrm{j}}{z-3}$.

1. Calculer $f(1+\mathrm{j})$; $f(\mathrm{j})$.
2. On pose $z = x+\mathrm{j}y$.
   a. Ecrire en fonction de x et y la forme algébrique $f(z)$.
   b. Quelle condition doit-on avoir sur x et y pour que $f(z)$ soit un nombre réel.
   c. Quelle condition doit-on avoir sur x et y pour que $f(z)$ soit un nombre imaginaire pur.
3. Déduire des questions précédentes la ligne de niveau 0 de $\mathrm{Im}(f(z))$ puis celle de $\mathrm{Re}(f(z))$.

2.23 Comment choisir $z = x+\mathrm{j}y$ pour que z^2+2z-3 soit un nombre réel ?

2.24 Déterminer $z = x+\mathrm{j}y$ pour que $\dfrac{1-z}{\mathrm{j}-z}$ soit réel ; imaginaire pur.

2.25 Cercle de Nyquist.
Les nombres a, b, c, d sont des réels donnés. x est un réel variable.
Soit $z = \dfrac{a+\mathrm{j}bx}{c+\mathrm{j}dx}$ et M son image dans un repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On veut déterminer l'ensemble E des points M obtenus quand x décrit $\mathbf{R}$.

1. Déterminer l'image A de z quand $x = 0$.
2. Soit B le point d'affixe $\frac{b}{d}$. Soit $Z = z - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right)$
   Montrer que $Z = \frac{ad - bc}{2cd} \times \frac{c - \mathrm{j}dx}{c + \mathrm{j}dx}$.
3. Calculer $|Z|$ et en déduire la courbe E.

Remarque : Le diagramme de Nyquist est un graphe utilisé en automatique pour évaluer la stabilité d'un système en boucle fermée. Il représente dans le plan complexe la réponse harmonique du système en boucle ouverte correspondant. La phase est l'angle et le module la distance du point à l'origine.

Transformations géométriques

2.26 Préciser chacune des transformations suivantes :

1. $z' = -2z$
2. $z' = z + 4\mathrm{j}$
3. $z' = -z$
4. $z' = \overline{z}$
5. $z' = \mathrm{j}z$
6. $z' = (1 - \mathrm{j})z$

2.27 *d'après BAC Septembre 1994, génie électronique et électrotechnique.*

1. a. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^2 - 2\sqrt{2}z + 4 = 0$
   b. Donner la notation exponentielle de chaque solution.
2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.
   a. Placer les points A, B, C d'affixes respectives $z_0 = 2\mathrm{j}$, $z_1 = \sqrt{2}(1 - \mathrm{j})$ et $z_2 = \sqrt{2}(1 + \mathrm{j})$
   b. Soit r la transformation géométrique du plan qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}z$. Préciser la nature de cette transformation.
   c. Montrer que $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{3\pi}{4}}z_1$. Que peut-on en déduire pour les points A et B ?
   d. Déterminer l'affixe du point D, image du point A par r. Placer ce point D dans le plan.
   e. Quelle est l'image de la droite (AB) par r ?

2.28 On considère la fonction $f : z \mapsto (2+2\mathrm{j})z$ et les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + \mathrm{j}$, $z_B = 2 + 3\mathrm{j}$ et $z_C = 1 + 2\mathrm{j}$

1. a. Déterminer les affixes des images de A, B et C par f.
   b. Placer ses images dans un repère orthogonal d'unite 1 cm.
2. a. Écrire $2 + 2\mathrm{j}$ sous forme trigonométrique.
   b. En déduire une vérification des images obtenues à la question précédente.

2.29 On considère la fonction $f : z \mapsto \frac{1}{z}$.

1. En s'inspirant de l'exemple donné dans le cours, déterminer l'image de la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $4x + 6y + 4 = 0$.
2. Vérifier votre résultat en utilisant la remarque du cours suivant l'exemple.

2.30 Soit f la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = \mathrm{j}\overline{z} + 1 + \mathrm{j}$.

1. Décomposer f en une succession de transformations élémentaires.
2. Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre Ω d'affixe 2j et de rayon 1.
   Dans un repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, construire l'image de ce cercle par la transformation f. (On ne demande aucun calcul).

2.31 Soit s la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = (\sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{j})z - \mathrm{j}$.
Décomposer f en une succession de transformations élémentaires.

2.32 Soit s la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = 2\mathrm{j}z + 2 + \mathrm{j}$.
Décomposer f en une succession de transformations élémentaires.

2.33 Soit s la transformation qui à $M(z)$ associe $M'(z')$ telle que $z' = \dfrac{2z-3}{z-1}$.
Décomposer f en une succession de transformations élémentaires. (On remarquera que $z' = 2 - \dfrac{1}{z-1}$).

2.34 On considère l'application de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ appelée transformation conforme du plan complexe.

1. Quelle est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer les réels a et b tels que $f(z) = a + \dfrac{b}{z+1}$.
3. Écrire f comme composée de transformations simples.
4. Démontrer que l'image par f de l'axe des imaginaires est le cercle de centre O de rayon 1 privé de O.

2.35 A tout réel $\omega > 0$, on associe $T(\omega) = \dfrac{5 + \mathrm{j}\omega}{4 + 2\mathrm{j}\omega}$.

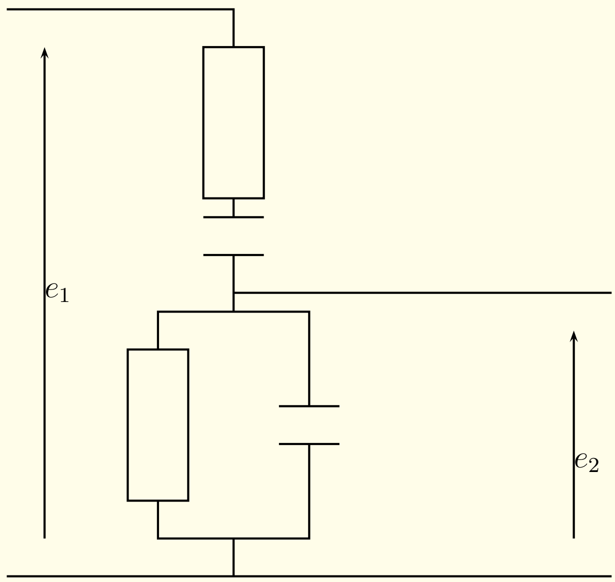
1. Montrer que l'on a $T(\omega) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2 + \mathrm{j}\omega}$.
2.
   a. Soit M le point du plan complexe d'affixe $2 + \mathrm{j}\omega$.
   Quel est l'ensemble Δ décrit par M lorsque ω varie dans $]0; +\infty[$.
   b. Representer Δ (unité graphique : 4 cm) (laisser de la place en haut de la feuille)
3. Quand M décrit Δ, le point M' d'affixe $T(\omega)$ décrit un ensemble (E).
   Montrer que (E) se déduit de Δ par trois transformations élementaires dont on précisera les éléments caractéristiques. Tracer (E).
4. On pose $\theta = \arg(T(\omega))$. Soit N le point de E pour lequel θ est minimum.
   a. Placer N sur la figure.
   b. Calculer alors $\sin(\theta)$ et donner une valeur approchée de θ à 10^{-2} près en radians.
   c. A l'aide d'une construction géométrique, placer le point H de Δ dont l'image est N (expliquer la construction).

2.36 Soit $T : \omega \mapsto T(\omega)$.
Le **diagramme de Nyquist** de l'application T est la courbe obtenue par l'ensemble des points M d'affixe $z = T(\omega)$ lorsque w varie de 0 à $+\infty$.

1. Dans cette question, on considère $T_1(\omega) = 1 + \mathrm{j}\omega$. Représenter le diagramme de Nyquist de l'application T_1.
2. A partir du diagramme précédent, construire le diagramme de Nyquist de l'application $T_2 = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$
3. A partir du diagramme précédent, construire le diagramme de Nyquist de l'application $T_3 = \dfrac{\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega}$ (On vérifiera auparavant que $\dfrac{\mathrm{j}\omega}{1+\mathrm{j}\omega} = 1 - \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\omega}$).

2.37 On bidouille un filtre en mettant deux résistances R et deux condensateurs de capacité C de manière rusée. Quand on applique à l'entrée une certaine tension de pulsation ω, on recueille à la sortie un nouveau signal « filtré » mais de même pulsation. Ce filtre est caractérisé par la fonction de transfert T définie par

$$T(\omega) = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_1(\omega)}{Z_2(\omega)}} \quad \text{avec} \quad Z_1\omega) = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad Z_2(\omega) = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + jC\omega}$$



Les constantes R et C sont bien sûr strictement positives.

1. Montrez que $T(\omega) = \dfrac{1}{3 + j\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$
2. **a.** On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$h(\omega) = RC\omega - \frac{1}{RC\omega}$$

   Dressez le tableau de variation de h sur $]0, +\infty[$.

   b. On considère le point m d'affixe $3 + jh(\omega)$. Quel est l'ensemble (D) décrit par le point m lorsque ω parcourt $]0, +\infty[$?

   c. Quelle transformation associe au point m le point M d'affixe $Z = T(\omega)$?

   d. Déduisez-en l'ensemble (E) décrit par le point M quand ω parcourt $]0, +\infty[$.

e. Tracez sur un même graphique les ensembles (D) et (E). Vous prendrez pour unité 6cm. Vous représenterez également le point m_0 d'affixe $3+\mathrm{j}$ et son image M_0 par la transformation envisagée.

Compléments : Complexe et électricité

2.38 Dans un circuit, deux résistances sont associées en série. On donne $u_1(t) = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ et $u_2(t) = 3\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Donner les formes trigonométriques puis algébriques des grandeurs complexes $\underline{U_1}$ et $\underline{U_2}$ associées à $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
2. En déduire la forme algébrique de $\underline{U}$, grandeur complexe associée à $u(t)$.
3. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près du module et d'un argument de $\underline{U}$.
4. En déduire l'expression de $u(t)$.

2.39 Trois dipoles d'impédances complexes respectives $\underline{Z_1} = 75 - 50\mathrm{j}$, $\underline{Z_2} = 50 + 50\mathrm{j}$ et $\underline{Z_3} = 100 - 25\mathrm{j}$ sont associés en série.

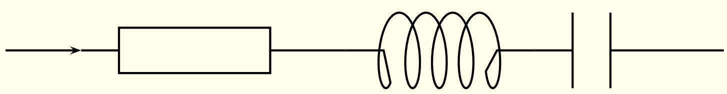
1. Quelle est l'impédance du dipôle équivalent ?
2. Quelle est l'impédance du dipôle équivalent si on monte les dipoles en parallèles ?

2.40 L'impédance complexe d'un circuit est telle que

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z_1} \times \underline{Z_2}}{\underline{Z_1} + \underline{Z_2} + \underline{Z_3}}$$

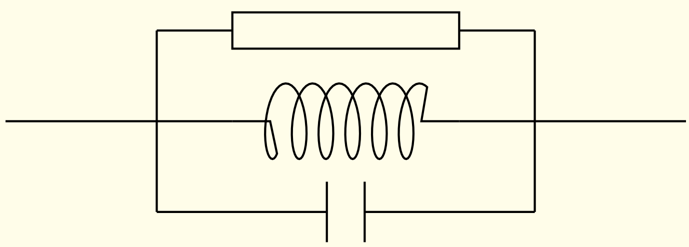
1. Sachant que $\underline{Z_1} = 1 + 2\mathrm{j}$, $\underline{Z_2} = -1 + 3\mathrm{j}$, $\underline{Z_3} = 4 + 5\mathrm{j}$, calculer l'impédance du circuit.

2.41 On considère le circuit ci-dessous.



1. Montrer que l'impédance complexe est $\underline{Z} = R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\mathrm{j}$
2. Calculer l'impédance du circuit sachant que $R = 20\Omega$, $L\omega = 150\Omega$ et $\frac{1}{C\omega} = 150\Omega$.

2.42 On considère le circuit ci-dessous.



1. Montrer que l'impédance complexe est $\dfrac{1}{\underline{Z}} = \dfrac{1}{R} + \mathrm{j}\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)$
2. Calculer l'impédance du circuit sachant que $R = 12\Omega$, $L\omega = 100\Omega$ et $\dfrac{1}{C\omega} = 150\Omega$.

7. Table des matières